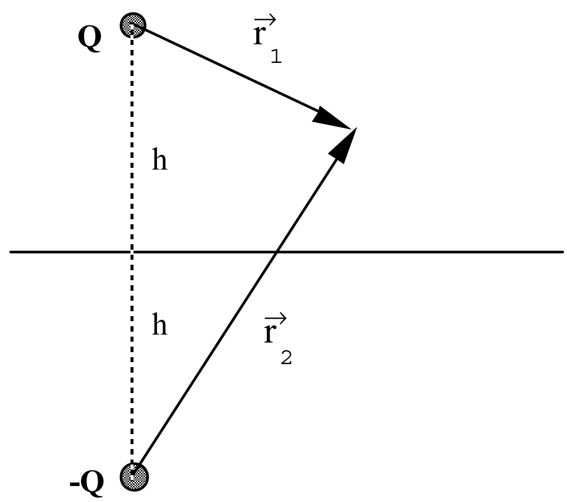
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKALSK ELEKTRONIKK

44015 ELEKTROMAGNETISME
LØSNINGSFORSLAG, EKSAMEN MAI 1998

Oppgave 1:

Forholdene ligger til rette for å anvende speilings-metoden. Den tillater oss å beregne feltstyrken ved å erstatte den plane lederen med et "speilbilde" av ladningen *Q*, dvs. en ladning -*Q* i avstand *z* = -*h*. Den totale løsningen finnes som en sum av bidragene fra de to ladningene.



a) Feltstyrken i lederen er null. Over lederen finner vi feltstyrkenpå *z*-aksen finnes ved å summere bidragene gitt av Coulombs lov. Nedenfor punktladningen får vi:

$$\vec{E}(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (h-z)^2}(-\hat{z}) + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 (h+z)^2}\hat{z} = -\frac{Q(h^2+z^2)}{2\pi\varepsilon_0 (h^2-z^2)^2}\hat{z}$$

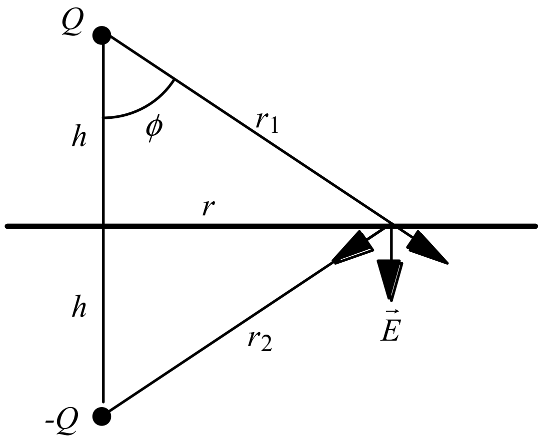
Ovenfor punktladningen får vi:

$$\vec{E}(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (h-z)^2}\hat{z} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 (h+z)^2}\hat{z} = \frac{Qhz}{\pi\varepsilon_0 (h^2-z^2)^2}\hat{z}$$

Oppsummert:

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} 0\,, & z < 0 \\ -\dfrac{Q(h^2+z^2)}{2\pi\varepsilon_0 (h^2-z^2)^2}\hat{z}\,, & 0 < z < h \\ \dfrac{Qhz}{\pi\varepsilon_0 (h^2-z^2)^2}\hat{z}\,, & z > h \end{cases}$$

b)



Flateladningstettheten er lik normalkomponenten av flukstettheten på lederoverflaten. Feltet står over alt normalt på lederoverflaten. Vi ser at de to ladningene bidrar like mye til normalkomponenten E_n. Altså blir:

$$E_n(r) = -2\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\cos\phi = -2\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\frac{h}{r_1} = -\frac{Qh}{2\pi\varepsilon_0 (r^2+h^2)^{3/2}}$$

Følgelig:

$$\rho_s(r) = \varepsilon_0 E_n(r) = -\frac{Qh}{2\pi(r^2+h^2)^{3/2}}$$

c) For å finne den samlede induserte ladning integrerer vi over hele planet :

$$Q_{ind} = \int_0^\infty -\frac{Qh}{2\pi(h^2+r^2)^{3/2}}2\pi r dr = -Qh\int_0^\infty \frac{r}{(h^2+r^2)^{3/2}}dr$$

$$= Qh\left[\frac{1}{(h^2+r^2)^{1/2}}\right]_0^\infty = Qh(0-\tfrac{1}{h}) = -Q$$

Den induserte ladning er altså av motsatt fortegn og samme størrelse som den gitte punktladningen.

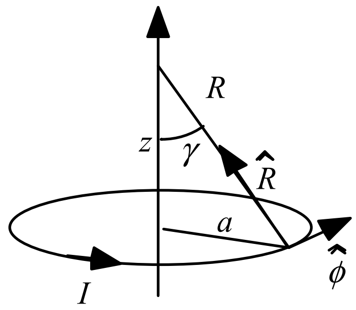
d) Kraften på punktladningen er $\vec{F} = Q\vec{E}$. Kraften er gitt av feltet fra speilladningen, som er i avstanden $2h$ fra punktladningen :

$$\vec{F} = Q\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0(2h)^2}\hat{z} = -\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 h^2}\hat{z}$$

Fortegnet viser at kraften virker nedover.

Oppgave 2:

a)



Biot-Savarts lov gir:

$$\vec{B}(z) = \oint_l \mu_0 \frac{I d\vec{l} \times \hat{R}}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \oint_l dl \hat{\phi} \times \hat{R}$$

Av symmetrigrunner må det resulterende feltet være rettet langs z-aksen. Vi må altså ta z-komponenten av $\hat{\phi} \times \hat{R}$. De to enhetsvektorene står vinkelrett på hverandre, så tallverdien av vektorproduktet er 1. z-komponenten blir da sin γ. Altså får vi:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I \sin\gamma}{4\pi R^2} \oint_l dl = \frac{\mu_0 I \frac{a}{R}}{4\pi R^2} 2\pi a = \frac{\mu_0 I a^2}{2R^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

b) Når vi i svaret ovenfor erstatter z med d, og lar $d \gg a$, så får vi:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2d^3}$$

Det samme får vi ved å benytte den oppgitte formelen for et magnetisk dipolfelt, når vi setter $r = d$ og $\theta = 0$.

La strømmen i sløyfe 1 være I_1. Siden d >> a kan fluksen gjennom sløyfe 2 finnes som produktet av flukstettheten og sløyfas areal:

$$\Psi_{m2} = \pi a^2 B = \frac{\pi \mu_0 a^4 I_1}{2d^3}$$

Gjensidig induktans blir da:

$$M = \frac{\Psi_{m2}}{I_1} = \frac{\pi \mu_0 a^4}{2d^3}$$

c)

$$emf = -\frac{d\Psi_{m2}}{dt} = -\frac{\pi \mu_0 a^4}{2d^3}\frac{dI_1}{dt} = -\frac{\pi \mu_0 \omega a^4 I_0}{2d^3}\cos\omega t$$

d)

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

hvor $\vec{m}$ er det magnetiske dipolmoment. Her er $\vec{m}$ og $\vec{B}$ parallelle. Følgelig er dreiemomentet null.

Oppgave 3:

a) Alle felter og strømmer er rettet vinkelrett på platene. Siden $\vec{J}$ er divergensfri, må den ha samme verdi i de to områdene. Derimot kan E være forskjellig, henholdsvis E_1 og E_2. Vi har:

$$J = \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$$

$$V_0 = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

Dette gir:

$$E_1 = \frac{V_0 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$E_2 = \frac{V_0 \sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$J = \frac{V_0 \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

b) De frie flateladningstetthetene er gitt av:

$$\rho_{s,A} = D_{n,A} = \varepsilon_1 E_1 = \frac{V_0 \varepsilon_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$\rho_{s,C} = D_{n,C} = -\varepsilon_2 E_2 = -\frac{V_0 \varepsilon_2 \sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$\rho_{s,B} = D_2 - D_1 = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \frac{V_0 (\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

De bundne flateladningstetthetene er gitt av:

$$\rho_{sb,A} = -P_{n,A} = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_1 = -\frac{V_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$\rho_{sb,C} = -P_{n,C} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_2 = \frac{V_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$\rho_{sb,B} = -(P_2 - P_1) = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_1 = \frac{V_0 \left[\varepsilon_1 \sigma_2 - \varepsilon_2 \sigma_1 + \varepsilon_0 (\sigma_1 - \sigma_2)\right]}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

Som en sjekk ser vi at summen av alle frie flateladninger er null, og summen av alle bundne flateladninger er null.