44015 ELEKTROMAGNETISME

LØSNINGSFORSLAG, EKSAMEN MAI 1997

Oppgave 1:

For å finne feltstyrken bruker vi Gauss lov:

$$\int_s \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q_{en}$$

Av symmetrigrubber er feltet radielt rettet, og av samme grunn kan feltet bare avhenge av koordinaten r, så vi kan skrive $\vec{E} = E(r)\hat{r}$, hvor $\hat{r}$ er enhetsvektoren i radiell retning. Det følger at

$$E = \frac{Q_{en}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Potensialet finner vi ved å integrere feltstyrken. Vi velger $V = 0$ for $r = \infty$, og får

$$V = \int_r^\infty E\, dr$$

Vi bruker disse formlene på de tilfellene som er oppgitt.

a) For $r<a$ blir $Q_{en} = \rho_v \cdot 4\pi r^3/3$ og for $r>a$ blir $Q_{en} = \rho_v \cdot 4\pi a^3/3$. Romladningstettheten ρ_v finnes som $\rho_v = 3Q/(4\pi a^3)$. Dette innsatt gir:

$$E = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & , \quad r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & , \quad r > a \end{cases}$$

For å beregne potensialet er dt best å begynne utenfor kula:

$$V = \int_r^\infty E dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad , \quad r > a$$

Innenfor kula regner vi ut integralet fra r til a, og legger til potensialet i $r = a$:

$$V = \int_r^a E dr + V(a) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a^3}(a^2 - r^2) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3}$$

b) Samme metode gir:

$$E = \begin{cases} 0 & , \quad r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & , \quad r > a \end{cases}$$

$$V = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} & , \quad r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & , \quad r > a \end{cases}$$

c) Nå er $\rho_v = kr$, hvor k er en konstant, som kan bestemmes ved at

$$Q = \int_0^a \rho_v 4\pi r^2 dr = 4\pi k \int_0^a r^3 dr = \pi k a^4$$

Dette gir

$$Q_{en} = \begin{cases} \int_0^r \rho_v 4\pi r^2\, dr = 4\pi k \int_0^r r^3 dr = Q\dfrac{r^4}{a^4} & , \quad r < a \\ Q & , \quad r > a \end{cases}$$

For feltstyrken får vi da

$$E = \begin{cases} \dfrac{Qr^2}{4\pi\varepsilon_0 a^4} & , \quad r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & , \quad r > a \end{cases}$$

$$V = \begin{cases} \dfrac{Q}{12\pi\varepsilon_0 a^4}(a^3 - r^3) + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \dfrac{Q}{3\pi\varepsilon_0 a} - \dfrac{Qr^3}{12\pi\varepsilon_0 a^4} & , \quad r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & , \quad r > a \end{cases}$$

d) Arbeidet som utføres ved å flytte en ladning i et elektrisk felt er gitt av produktet av ladningen og potensialforskjellen mellom endepunkt og startpunkt. Arbeidet W blir da:

$$W = q[V(0) - V(a)] = \frac{qQ}{12\pi\varepsilon_0 a}$$

Oppgave 2:

a) Reluktansen for den magnetiske kretsen blir:

$$\Re = \frac{2\pi a - \delta}{\mu_0 \mu_r \pi b^2} + \frac{\delta}{\mu_0 \pi b^2} \approx \frac{1}{\pi \mu_0 b^2}(2\pi a / \mu_r + \delta)$$

En strøm I_A i spole A genererer en fluks $\Psi_{\mu A}$ i kjernen:

$$\Psi_{mA} = \frac{N_A I_A}{\Re} = \frac{\pi \mu_0 b^2 N_A I_A}{2\pi a / \mu_r + \delta}$$

Dette gir for selvinduktansen:

$$L_A = \frac{\Lambda_A}{I_A} = \frac{N_A \Psi_{mA}}{I_A} = \frac{\pi\mu_0 b^2 N_A{}^2}{2\pi a/\mu_r + \delta}$$

L_B finner vi ved å erstatte A med B i uttrykket for L_A:

$$L_B = \frac{\pi\mu_0 b^2 N_B{}^2}{2\pi a/\mu_r + \delta}$$

Gjensidig induktans M finnes ved å beregne fluksgjennomløpet Λ_{AB} gjennom spole B, som skyldes strømmen i spole A:

$$M = \frac{\Lambda_{AB}}{I_A} = \frac{N_B \Psi_{mAB}}{I_A} = \frac{\pi\mu_0 b^2 N_A N_B}{2\pi a/\mu_r + \delta}$$

b) Det er ingen resistans i kretsen. Da er:

$$V_A = L_A \frac{dI_A}{dt}$$

som gir

$$\frac{dI_A}{dt} = \frac{V_0}{L_A}\cos\omega t$$

Dette gir

$$I_A = \frac{V_0}{\omega L_A}\sin\omega t = \frac{2\pi a/\mu_r + \delta}{\pi\mu_0 b^2 \omega N_A{}^2} V_0 \sin\omega t$$

Integrasjonskonstanten er satt lik null, fordi det ikke er påtrykt noen likestrøm.

Den induserte emf i spole B er:

$$V_B = -\frac{d\Lambda_{AB}}{dt} = -M\frac{dI_A}{dt} = -\frac{M}{L_A}V_A = -\frac{N_B}{N_A}V_0\cos\omega t$$

c) Kretsen B er nå lukket, og resistansen er null. Derfor må fluksen gjennom spolen være konstant, og siden vi bare er interessert i vekselstrømmen, setter vi konstanten lik null:

$$N_A I_A + N_B I_B = 0$$

Siden fluksen er null, induseres det ingen spenning i spolene. Strømmen i spole A er derfor gitt av:

$$I_A = \frac{V_A}{R} = \frac{V_0}{R}\cos\omega t$$

I_B blir da:

$$I_B = -\frac{N_A}{N_B} I_A = -\frac{N_A}{N_B}\frac{V_0}{R}\cos\omega t$$

Oppgave 3:

a) Vektorene $\vec{E}$ og $\vec{D}$ må være parallelle både over og under grenseflaten. Figur (a) og (e) har ingen "makker", og kan derfor utelukkes. De matchende parene er (b)-(d) og (c)-(f). Normalkomponenten av $\vec{D}$ og tangensialkomponenten av $\vec{E}$ er kontinuerlig. Derfor kan (b) og (f) beskrive $\vec{D}$-feltet, mens (c) og (d) kan beskrive $\vec{E}$-feltet. Det gjenstår å bestemme hvilket av parene som er riktig. Det dielektriske materialet er nedenfor grenseflaten. Siden ε_r er større enn 1, er forholdet mellom D og E større i enn utenfor materialet. Det er tilfelle for paret (b)-(d). Altså beskriver (b) $\vec{D}$-feltet og (d) E-feltet.

Når vi bruker indeks 1 for vakuum og 2 for materialet,finner vi relativ permittivitet slik:

$$\varepsilon_r = \frac{D_2 / E_2}{D_1 / E_1} = \frac{D_2 / D_1}{E_2 / E_1} = \frac{3/3}{3/4.5} = 1.5$$

b) Kraften som virker på en punktladning Q er

$$\vec{F} = Q\vec{U} \times \vec{B}$$

$\vec{U} \times \vec{B}$ er rettet mot venstre. Den positive partiklen må derfor avbøyes i den retningen. B er positiv, C er negativ.

Vinkelfrekvensen er QB/m , som er lik for de to partiklene. Altså bruker de like lang tid på å bevege seg en halvsirkel, og de kommer samtidig fram. Siden b på denne tiden beveger seg en lengre vei må den ha størst hastighet.

c) Argumentet til logaritmen er ubenevnt, som det skal være. Dessuten er begge sider av likhetstegnet vektore. Dimensjonen på venstre side er

$$\mathrm{C/m^2}$$

(Husk f. eks at på en lederoverflate er $D = \rho_s$, som er flateladningstetthet).

På venstre side har vi dimensjonen

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m(m/s)}} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m^2}} = \mathrm{C/m^2}$$

Altså er ligningen dimensjonsmessig korrekt.