NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKALSK ELEKTRONIKK

44015 ELEKTROMAGNETISME
LØSNINGSFORSLAG, EKSAMEN AUGUST 1997

Oppgave 1:

a) For $\rho<a$ og for $\rho>b$ er rommet feltfritt, og derved er potensialet konstant. Altså:

$$\vec{E}(\rho) = 0, \quad \rho<a \text{ og } \rho>b$$

$$V(\rho) = \begin{cases} V_0; \ \rho < a \\ 0; \rho > b \end{cases}$$

Resten av beregningene angår området $a < \rho < b$. Med en – foreløpig ukjent – ladning $\rho_{l,a}$ pr. lengdeenhet på innerlederen, blir feltstyrken (Gauss' lov):

$$\vec{E}(\rho) = \frac{\rho_{l.a}}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\rho}$$

Potensialforskjellen V_0 fåes som integralet av feltstyrken fra innerleder til ytterleder:

$$V_0 = \int_a^b \frac{\rho_{l.a}}{2\pi\varepsilon_0\rho}d\rho = \frac{\rho_{l.a}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

Dette gir for $\rho_{l.a}$:

$$\rho_{l.a} = \frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\ln\frac{b}{a}}$$

Innsatt i uttrykket for $\vec{E}(\rho)$, får vi:

$$\underline{\underline{\vec{E}(\rho) = \frac{V_0}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{\rho}\hat{\rho}}}$$

Potensialet i et punkt ρ er:

$$V(\rho) = \int_\rho^b \frac{\rho_{l.a}}{2\pi\varepsilon_0\rho}d\rho = \frac{\rho_{l.a}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{\rho} \quad \underline{\underline{= V_0\frac{\ln\frac{b}{\rho}}{\ln\frac{b}{a}}}}$$

b) Feltstyrken er gitt av:

$$\vec{E}(\rho) = -\nabla V(\rho) = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{\rho} = \underline{\underline{\frac{V_0}{b-a}}}\hat{\rho}$$

Romladningen er gitt av:

$$\rho_v(\rho) = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}(\rho) = \frac{\varepsilon_0}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho E_\rho) = \underline{\underline{\frac{\varepsilon_0 V_0}{(b-a)\rho}}}$$

c) Det er her enklest å regne ut energien ved hjelp av feltet:

$$w_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^b 2\pi\rho E(\rho)^2\, d\rho = \underline{\underline{\frac{\pi\varepsilon_0}{2} V_0^2 \frac{b+a}{b-a}}}$$

d) Når romladningen utgjøres av bare ladede partikler av samme slag, er strømtettheten gitt som produktet av romladningstettheten og ladningsbærernes hastighet:

$$\vec{J} = \rho_v \mu \vec{E} = \underline{\underline{\varepsilon_0 \mu \left(\frac{V_0}{b-a}\right)^2 \frac{1}{\rho}\hat{\rho}}}$$

For stasjonær strøm forlanger kontinuitetsligningen at $\nabla \cdot \vec{J} = 0$.

$$\nabla \cdot \vec{J} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho J_\rho) = \underline{0}$$

Oppgave 2:

a) Siden de magnetiske delene av kretsen antas å ha uendelig permeabilitet, er det bare gapene som vil bidra til kretsens reluktans. Reluktansen til luftgapet og pakningen er henholdsvis gitt som

$$\Re_g = \frac{x}{\mu_0 \pi a^2}$$

og

$$\Re_p = \frac{t}{\mu_0 a \cdot 2\pi a} = \frac{t}{\mu_0 2\pi a^2}$$

Den totale reluktansen blir dermed

$$\underline{\underline{\Re_{tot}}} = \Re_g + \Re_p == \underline{\underline{\frac{x + t/2}{\pi \mu_0 a^2}}}$$

Finner fluksen gjennom spolen:

$$\Psi_m = \frac{NI}{\Re_{tot}} = \frac{\pi\mu_0 a^2 NI}{x + t/2}$$

Selvinduktansen er da gitt ved

$$\underline{\underline{L}} = \frac{\Lambda}{I} = \frac{N\Psi_m}{I} = \underline{\underline{\frac{\pi\mu_0 a^2 N^2}{x + t/2}}}$$

b) Vi antar at feltet er konstant i gapene. I luftgapet har vi da at

$$\underline{\underline{B_g}} = \frac{\Psi_m}{s_g} = \frac{\pi\mu_0 a^2 NI}{(x + t/2)\pi a^2} = \underline{\underline{\frac{\mu_0 NI}{x + t/2}}}$$

B-feltet i pakningen er gitt ved

$$\underline{\underline{B_p}} = \frac{\Psi_m}{s_p} = \frac{\pi\mu_0 a^2 NI}{(x + t/2)2\pi a^2} = \underline{\underline{\frac{\mu_0 NI}{(2x + t)}}}$$

c) Det enkleste er å beregne totalenergien ved å bruke resulatet fra a):

$$\underline{\underline{W_m}} = \frac{1}{2} LI^2 = \underline{\underline{\frac{\pi\mu_0 a^2 N^2 I^2}{2x + t}}}$$

d) Den magnetiske kraften som virker på stempelet er gitt ved

$$F_m = \frac{\partial W_m}{\partial x} = -\frac{2\pi\mu_0 a^2 N^2 I^2}{(2x + t)^2}$$

Det negative fortegnet betyr at kraften vil (forsøke å) få x til å avta.

Alternativt kan man benytte at kraft pr. flateenhet i luftgapet er $B^2/(2\mu_0)$:

$$F_m = \pi a^2 \cdot \frac{B^2}{2\mu_0} = -\frac{\pi\mu_0 a^2 N^2 I^2}{2(x + t/2)^2}$$

For at at den magnetiske kraften akkurat skal motvirke tyngdekraften må:

$$|F_m| = mg$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\pi\mu_0 a^2 N^2 I^2}{2(x+t/2)^2} = mg$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{\underline{I = \frac{x+t/2}{aN}\sqrt{\frac{2mg}{\pi\mu_0}}}}$$

Oppgave 3:

a) Den elektromotoriske spenningen er gitt av

$$emf = -\frac{d\psi_m}{dt}$$

Siden $a \ll d$ kan vi anta at flukstettheten $\vec{B}$ er konstant over sløyfen, slik at

$$\psi_m = \vec{B}\cdot\vec{n}\,\pi a^2$$

og feltstyrken $\vec{B}$ kan beregnes ved dipolapproksimasjonen. Denne gir $\vec{B}$ uttrykt ved komponentene B_ρ og B_ϕ. Vi får

$$\vec{B}\cdot\vec{n} = B_r\cos\phi - B_\phi\sin\phi$$

Innsatt fra dipolfeltet, og med $\phi = \omega t$:

$$\psi_m = \frac{\mu_0 I_0 \pi a^4}{4d^3}(2\cos^2\omega t - \sin^2\omega t)$$

Derivasjon gir

$$emf = -\frac{\pi a^4\mu_0 I_0}{4d^3}(-4\omega\cos\omega t\sin\omega t - 2\omega\sin\omega t\cos\omega t)$$
$$= \frac{3\pi\omega a^4\mu_0 I_0}{2d^3}\cos\omega t\sin\omega t = \frac{3\pi\omega a^4\mu_0 I_0}{4d^3}\sin 2\omega t$$

b) Gjennom en lukket, ideelt ledende sløyfe er fluksen konstant (For en reell superleder er denne konstanten null). Fluksen har bidrag fra strømmene i begge sløyfene:

$$\psi_m = \frac{\mu_0 I_0 \pi a^4}{4d^3}(2\cos^2\omega t - \sin^2\omega t) + LI(t)$$

Dette gir

$$I(t) = -\frac{\mu_0 I_0 \pi a^4}{4d^3 L}(2\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) + konst.$$

Setter vi konstanten lik null, blir dette

$$I(t) = -\frac{\mu_0 I_0 \pi a^4}{4d^3 L}(2\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) = -\frac{\mu_0 I_0 \pi a^4}{4d^3 L}(3\cos^2 \omega t - 1)$$