UNIVERSITETET I TRONDHEIM Side 1
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKALSK ELEKTRONIKK

44015 ELEKTROMAGNETISME

LØSNINGSFORSLAG, EKSAMEN MAI 1995

Oppgave 1:

1.1.a Siden platekondensatoren regnes uendelig stor, kan alle feltene skrives på formen

$$\vec{A} = A(x)\hat{x}$$

I det følgende opererer vi derfor bare med skalarer. Vi vet at D-feltet er konstant i det dielektriske mediet (rv=0). Derved blir også E konstant, og lik:

$$E = -V_0 / d$$
$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = -\varepsilon_0 \varepsilon_r V_0 / d$$

Potensialet er gitt av:

$$V = -\int_{-d/2}^{x} E dx = V_0(1/2 + x/d)$$

1.1.b Polarisasjonen er gitt av:

$$P = D - \varepsilon_0 E = -\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)V_0 / d$$

1.2.a Siden D er konstant, kan vi skrive:

$$E(x) = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(x)} = \frac{D(\frac{x^2}{d^2} + 1)}{4\varepsilon_0}$$

Potensialet i et punkt x finner vi ved å integere det elektriske feltet:

$$V(x) = -\int_{-\frac{d}{2}}^{x} E(x)dx + V(-\frac{d}{2}) = -\int_{-\frac{d}{2}}^{x} \frac{D}{4\varepsilon_0}\left(\frac{x^2}{d^2} + 1\right)dx$$
$$= -\frac{Dd}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3}(\frac{x}{d})^3 + \frac{x}{d} + \frac{13}{24}\right) \qquad \text{for } -\frac{d}{2} \le x \le \frac{d}{2}$$

Vi finner så V_0 som

$$V_0 = V(d/2) = -\frac{Dd}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2} + \frac{13}{24}\right) = -\frac{13}{48}\frac{d}{\varepsilon_0}D$$

Dette gir

$$D = -\frac{48\varepsilon_0 V_0}{13d}$$

$$E(x) = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon(x)} = -\frac{12}{13}\frac{V_0}{d}\left(\frac{x^2}{d^2}+1\right)$$

$$V(x) = \frac{12V_0}{13}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{d}\right)^3 + \frac{x}{d} + \frac{13}{24}\right)$$

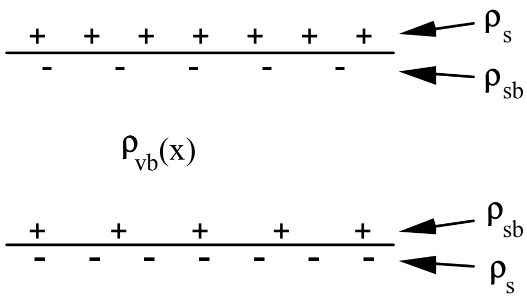
Alle utrykkene gjelder for $|x| < d/2$. Utenfor kondensatorplatene er begge feltene null.

1.2.b Vi får

$$P(x) = D - \varepsilon_0 E(x) = \frac{12\varepsilon_0}{13d} V_0\left(\frac{x^2}{d^2} - 3\right)$$

1.2.c Bundet romladningstetthet:

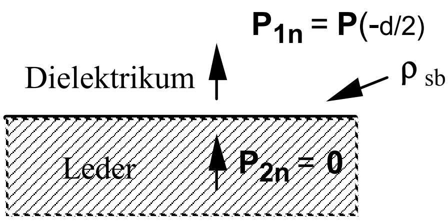
$$\rho_{vb}(x) = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\partial}{\partial x} P(x) = -\frac{24\varepsilon_0 V_0 x}{13d^3}$$



Bundet flateladningstetthet :

Ved nedre plate :

$$\rho_{sb} = P_{2n} - P_{1n} = -P\left(-\frac{d}{2}\right) = -\frac{12\varepsilon_0}{13d} V_0\left(\frac{1}{4} - 3\right) = \frac{33\varepsilon_0 V_0}{13d}$$



Ved øvre plate får vi samme ladningene med motsatt fortegn.

1.2.d

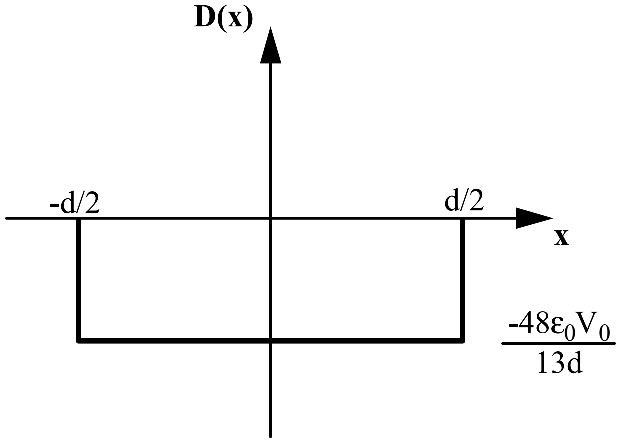


Fig 1.1: D(x) som funksjon av x

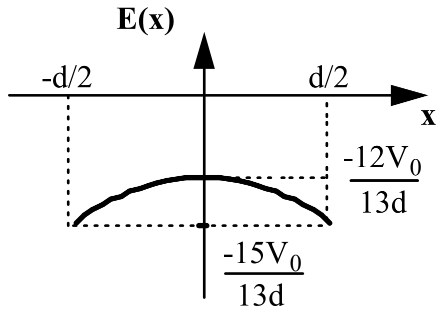


Fig.1.2: Feltstyrken som funksjon av x

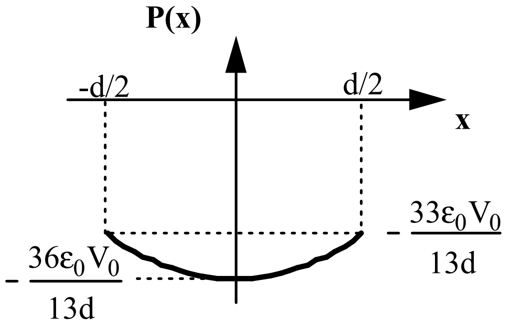


Fig.1.3: Polarisasjonen som funksjon av x

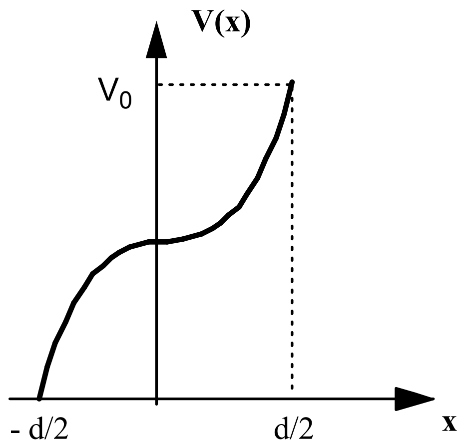


Fig.1.4: Potensialet som funksjon av x
(Krumning sterkt overdrevet)

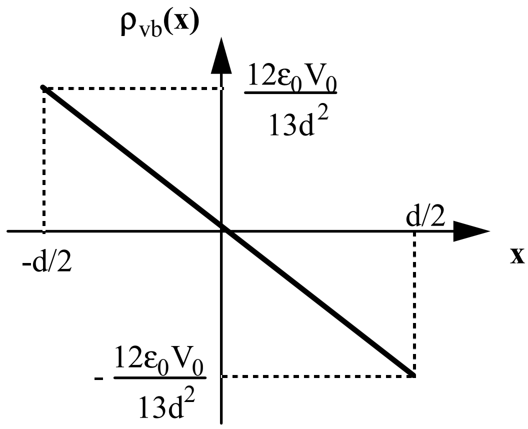


Fig.1.5: Bundet romladningstetthet som funksjon av x

Oppgave 2:

2.1.a Den vanlige tilnærmelsen for lange, tynne solenoider er at feltstyrken er konstant inne i solenoiden, og null utenfor.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = NI$$

som gir:

$$\begin{aligned} Hl_A &= N_A I_A \\ B &= \mu_0 H = \mu_0 N_A I_A / l_A \end{aligned}$$

2.1.b Selvinduktansen er gitt av:

$$L_A = N_A \Psi_m / I_A = N_A (\pi d_A^2 / 4) B / I_A = \frac{\pi}{4} \mu_0 \frac{d_A^2 N_A^2}{l_A}$$

2.2.a Stømmen I_A i spole A genererer en fluks ψ_m i spole B:

$$\Psi_{mAB} = (\pi d_B^2 / 4) B = \frac{\pi}{4} \mu_0 \frac{d_B^2 N_A I_A}{l_A}$$

Denne fluksen passerer gjennom brøkdelen s/l_B av de N_B tørnene i solenoid B. Altså er:

$$M = \frac{s}{l_B} \frac{N_B \Psi_{mAB}}{I_A} = \frac{\pi}{4} \mu_0 \frac{s d_B^2 N_A N_B}{l_A l_B}$$

2.2.b Energien er gitt av:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} L_A I_A^2 + \frac{1}{2} L_B I_B^2 + M I_A I_B = \\ &\frac{\pi}{8} \mu_0 \left(\frac{d_A^2 N_A^2 I_A^2}{l_A} + \frac{d_B^2 N_B^2 I_B^2}{l_B} + \frac{2 s d_B^2 N_A N_B I_A I_B}{l_A l_B} \right) \end{aligned}$$

Kraften på spole B finnes ved å derivere energien med hensyn på s:

$$F = \left. \frac{\partial W_m}{\partial s} \right|_{I_A I_B} = \frac{\pi}{4} \mu_0 \frac{d_B^2 N_A N_B I_A I_B}{l_A l_B}$$

Kraften virker i solenoidens lengderetning. F er positiv hvis I_A og I_B har samme fortegn. Det betyr at kraften virker slik at s vil øke, dvs. solenoidene vil trekkes inn i hverandre. Dersom strømmene har motsatt fortegn, vil solenoidene frastøte hverandre.

2.3.a Den elektromotoriske spenning er gitt av:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Lambda}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\mu_0 \frac{s d_B^{\,2} N_A N_B}{l_A l_B} I_0 \sin \omega t\right)$$

$$= -\frac{\pi}{4}\mu_0 \omega \frac{s d_B^{\,2} N_A N_B}{l_A l_B} I_0 \cos \omega t$$

Oppgave 3:

3.1.a Grensefrekvensen er der hvor ledningsstrømmen er lik forskyvningsstrømmen:

$$\omega\varepsilon = \sigma$$

Altså

$$f = \omega / 2\pi = \sigma/(2\pi\varepsilon) = 1.06 \times 10^8 \text{ Hz} = 106 \text{ MHz}$$

3.2.a

$$R = \frac{d}{\sigma s} = 2000\,\Omega$$

$$C = \frac{\varepsilon s}{d} = 7.5 \times 10^{-13} \text{ F} = 0.75 \text{ pF}$$

3.2.b Uttrykket for motstand er eksakt, kapasitansen er tilnærmet. Grunnen er at det også går elektrisk fluks i lufta utenfor dielektriket, mens det ikke går strøm der. Tilnærmelsen er god når tykkelsen på dielektriket er liten sammenlignet med de transversale dimensjoner.

Oppgave 4:

4.a Legg en lukket kurve gjennom det ferromagnetiske materialet, som krysser luftgapet i avstand r fra sentret. Kurven krysses av alle tørn som ligger utenfor r, dvs. et antall $N(a - r)/r$. Linjeintegralet av magnetisk feltstyrke langs kurven får bare bidrag fra luftgapet, siden permeabiliteten i materialet er uendelig. Dette gir:

$$Hd = NI(a - r)/a$$

$$H = \frac{NI(a - r)}{ad}$$

Magnetfeltet står på tvers av luftgapet, men siden strømretningen ikke er gitt, kan vi ikke si om feltet er rettet oppover eller nedover.

4.b Det går ikke samme magnetiske fluks gjennom alle tørnene, derfor må vi bruke formelen:

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{N} \Psi_{mi} \approx \frac{N}{aI}\int_0^a \Psi_m(r)\,dr$$

hvor fluksen $\Psi_m(r)$ er gitt av:

$$\Psi_m(r) = \int_0^r B \cdot 2\pi r\, dr = \frac{\mu_0 NI}{ad} 2\pi \int_0^r (ar - r^2)\,dr = 2\pi \frac{\mu_0 NI}{ad}\left(ar^2/2 - r^3/3\right)$$

Dette gir:

Side 6

$$L = \frac{\pi \mu_0 N^2 a^2}{6d}$$