NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
AVDELING FOR ELEKTRO- OG DATATEKNIKK
INSTITUTT FOR FYSIKALSK ELEKTRONIKK

44015 ELEKTROMAGNETISME

LØSNINGSFORSLAG, EKSAMEN AUGUST 1995

Oppgave 1

1.1.a) Vi benytter Gauss lov:

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{en}$$

der $d\vec{s}$ er den utadrettede overflatenormalen til overflaten s. Vi velger å la s være en kuleflate konsentrisk med de gitte kulene. Av symmetrigrunner må feltet over alt være radielt rettet ut fra romladningens sentrum, og feltstyrken kan bare være en funksjon av avstanden r_s fra samme sentrum. Ladningen Q på den innerste kula vil ligge i overflaten, og ladningen $-Q$ på kuleskallet vil ligge på den innerste overflata. Vi kan derfor skrive

$$4\pi r^2 \varepsilon_0 E(r_s) = \begin{cases} 0 & , r_s < a \\ Q & , a < r_s < b \\ Q + (-Q) = 0 & , b > r_s \end{cases}$$

Dermed får vi at

$$\underline{\underline{E(r_s) = \begin{cases} 0 & , r_s < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_s^2} & , a < r_s < b \\ 0 & , r_s > b \end{cases}}}$$

1.1.b) Kapasitansen C er gitt av $C=Q/V$, hvor V er potensialforskjellen mellom de to kulene:

$$V = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r_s^2}\, dr_s = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r_s}\right]_a^b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Dette gir:

$$\underline{\underline{C = 4\pi\varepsilon_o \frac{ab}{b-a}}}$$

Den elektrostatiske energien finner vi som:

$$\underline{\underline{W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o}\frac{b-a}{ab}}}$$

1.1.c) Flateladningstetthetene er gitt av normalkomponenten av flukstettheten $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$. Dette gir:

$$\rho_s(a) = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

$$\rho_s(b) = -\frac{Q}{4\pi b^2}$$

$$\rho_s(c) = 0$$

1.2.a) Vi må nå ta med romladningen i Gauss lov:

$$4\pi r_s^2 \varepsilon_0 E(r_s) = \begin{cases} 0 & , r_s < a \\ Q + \int_a^{r_s} \rho_v 4\pi r_s^2 dr_s = Q + \frac{4}{3}\pi\rho_v\left(r_s^3 - a^3\right) & , a < r_s < b \\ 0 & , b < r_s < c \\ Q + \int_a^b \rho_v 4\pi r_s^2 dr_s + (-Q) = \frac{4}{3}\pi\rho_v\left(b^3 - a^3\right) & , r_s > c_s \end{cases}$$

Dette gir:

$$E(r_s) = \begin{cases} 0 & , r_s < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_s^2} + \dfrac{\rho_v}{3\varepsilon_0}\left(r_s - \dfrac{a^3}{r_s^2}\right) & , a < r_s < b \\ 0 & , b < r_s < c \\ \dfrac{\rho_v}{3\varepsilon_0}\dfrac{b^3 - a^3}{r_s^2} & , r_s > c \end{cases}$$

1.2.b) Flateladningstettheten finnes som ovenfor:

$$\rho_s(a) = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

$$\rho_s(b) = -\frac{Q}{4\pi b^2} - \frac{\rho_v}{3}\frac{b^3 - a^3}{b^2}$$

$$\rho_s(c) = \frac{\rho_v}{3}\frac{b^3 - a^3}{c^2}$$

Vi får altså ikke lenger null flateladning på den ytterste kuleflaten.

Oppgave 2:

2.1.a) Siden *d>>a* kan vi bruke dipolapproksimasjonen til å beregne den magnetiske flukstettheten i en sløyfe, som forårsakes av strømmen i den andre. Videre kan vi regne flukstettheten som konstant over sløfens areal. Flukstettheten i sløyfe B, forårsaket av strømmen i sløyfe A, er radiell, og gitt av uttrykket for flukstettheten når $\theta = 0$:

$$\vec{B} = \hat{z}\frac{2\mu_0(\pi a^2)I}{4\pi d^3} = \hat{z}\frac{\mu_0 a^2 I}{2d^3}$$

Gjensidig induktans blir da:

$$M = \frac{\Psi_m}{I} = \frac{\pi a^2 B}{I} = \underline{\underline{\frac{\pi \mu_0 a^4}{2d^3}}}$$

2.1.b) Dreiemomentet er gitt av $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$. Siden $\vec{m}$ og $\vec{B}$ er parallelle, blir $\vec{T}$ lik null. Dette gjelder både $\vec{T}_A$ og $\vec{T}_B$.

2.1.c) Kraften på en sløyfe finner vi av:

$$F_z = \left(\frac{\partial W}{\partial d}\right)_I$$

hvor W er den magnetiske energien:

$$W = \tfrac{1}{2} L_A I_A^{\ 2} + \tfrac{1}{2} L_B I_B^{\ 2} + M I_A I_B$$

Siden L_A og L_B er uavhengige av d får vi:

$$F_z = I^2 \frac{\partial M}{\partial d} = \underline{\underline{-\frac{3\pi \mu_0 a^4 I^2}{2d^4}}}$$

Minustegnet betyr at kreftene virker slik at d vil reduseres. Altså tiltrekker sløyfene hverandre.

Kraften kan også regnes ut ved å integrere den magnetiske kraften $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$ langs sløyfen. Det er da nødvendig å ta med θ-komponenten av flukstettheten. Når resultatet rekkeutvikles til laveste orden i a, får vi samme resultat som ovenfor.

2.2.a) Det er fremdeles bare den radiale komponenten av flukstettheten som bidrar til fluksen. Vi får derfor bare å multiplisere resultatet i 1.1.a) med cos θ:

$$M = \underline{\underline{\frac{\pi \mu_0 a^4}{2d^3} \cos \omega t}}$$

2.2.b) Den elektromotoriske spenning er gitt av:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi_m}{dt} = -I\frac{dM}{dt} = \underline{\underline{\frac{\pi \mu_0 \omega a^4 I}{2d^3} \sin \omega t}}$$

Oppgave 3

3.1.a) Romladningstettheten finnes ved å beregne $\nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$

Innenfor kulen, $r_S > a$:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 + 0 + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Utenfor kulen, $r_s > a$:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{r_s^2}\frac{\partial}{\partial r_s}(r_s^2 E_{r_s}) + \frac{1}{r_s\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(E_\theta\sin\theta) + 0$$
$$= E_0 a^3 2\cos\theta\frac{1}{r_s^2}\frac{\partial}{\partial r_s}(r_s^{-1}) + \frac{E_0 a^3}{r_s^4\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta)$$
$$= -E_0 a^3 2\cos\theta\frac{1}{r_s^4} + E_0 a^3 2\cos\theta\frac{1}{r_s^4} = 0$$

Det er altså ingen romladning hverken inni eller utenfor kulen. Feltet må være satt opp av flateladninger på kulen. Disse finnes nedenfor.

3.1.b) Flateladningstettheten er gitt av differensen mellom normalkomponenten av flukstettheten på yttersiden og på innersiden av kula:

$$\rho_s = \varepsilon_0\frac{E_0 a^3}{a^3}2\cos\theta - (-\varepsilon_0 E_0\cos\theta) = \underline{\underline{3\varepsilon_0 E_0\cos\theta}}$$

3.2.a) Arbeidet som blir utført er å flytte ladningen Q fra A til A′. Ladningen flyttes da fra et potensial i A som kan skrives som en sum av potensial fra to punktladninger :

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

I A′er derimot potensialet for den tredje ladningen

$$V_{A'} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\frac{a}{2}} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\frac{a}{2}}$$

Arbeidet som blir utført blir da

$$\Delta W = Q\Delta V = Q(V_{A'} - V_A)$$
$$= \frac{2Q^2}{4\pi\varepsilon_0\frac{a}{2}} - \frac{2Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 a}(1-\frac{1}{2}) = \underline{\underline{\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 a}}}$$

3.3.a) Fluksen satt opp i spolen er 4 ganger så stor som den fluks en sløyfe ville satt opp, og denne fluksen går gjennom 4 ganger så mange sløyfer:

$$\underline{\underline{L_T = 4^2 L = 16L}}$$

3.3.b) Spolen består nå effektivt av 2 sløyfer (to av sløyfene kansellerer hverandre)

$$\underline{\underline{L_T = 2^2 L = 4L}}$$