UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKALSK ELEKTRONIKK

44015 ELEKTROMAGNETISME
LØSNINGSFORSLAG, EKSAMEN JUNI 1994

Oppgave 1:

1.1.a) Benytter Gauss lov:

$$\oint_s \vec{D}(r_s) \cdot d\vec{s} = Q_{en}$$

der vi lar integrasjonsflaten *s* være en kuleflate med samme sentrum som den ledende kula og det ledende kuleskallet, $d\vec{s}$ er den utadrettede flatenormalen til *s* og Q_{en} er den totale ubundne ladningen omsluttet av *s*. Av symmetrigrunner må D-feltet være radielt rettet (dvs. parallelt med $d\vec{s}$) og kun en funksjon av radien r_s.

i) $r_s<a$:

$$Q_{en} = 0 \quad \Rightarrow \quad D(r_s) = 0$$

ii) $a<r_s<b$:

$$\oint_s \vec{D}(r_s) \cdot d\vec{s} = q$$

$$\Updownarrow$$

$$D(r_s) 4\pi r_s^2 = q$$

$$\Updownarrow$$

$$D(r_s) = \frac{q}{4\pi r_s^2}$$

iii) $b<r_s$

$$Q_{en} = 0 \quad \Rightarrow \quad D(r_s) = 0$$

I et dielektrikum er $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$, og vi finner at:

$$\underline{\underline{\vec{E}(r_s) = \begin{cases} \vec{0} & , r_s < a \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r_s^2}\hat{r}_s & , a < r_s < b \\ \vec{0} & , b < r_s \end{cases}}}$$

1.1.b) Generelt er

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

men i et lineært dielektrikum kan dette skrives

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

Altså må polarisasjonen $\vec{P}$ i et dielektrikum være gitt ved

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\vec{E}$$

Setter vi inn fra 1.1.a) finner vi at polarisasjonen i vårt dielektrikum er gitt som

$$\underline{\underline{\vec{P}(r_s) = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{q}{4\pi r_s^2} \hat{r}_s}}$$

1.2.a) Gitt et medium der

$$\vec{P} = P_0 \hat{r}_s + \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

Fremdeles gjelder at $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, og setter vi inn for $\vec{D}$ fra 1.1.a) (som vi fant ved Gauss lov) finner vi at

$$\frac{q}{4\pi r_s^2} \hat{r}_s = P_0 \hat{r}_s + \varepsilon_0 (1+\chi) \vec{E}(r_s)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\vec{E}(r_s) = \frac{1}{\varepsilon_0 (1+\chi)} \left(\frac{q}{4\pi r_s^2} - P_0 \right) \hat{r}_s}}$$

1.2.b) Polarisasjonen i mediet er gitt som

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= P_0 \hat{r}_s + \chi \varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0 (1+\chi)} \left(\frac{q}{4\pi r_s^2} - P_0 \right) \hat{r}_s \\
&= \left[\left(1 - \frac{\chi}{1+\chi} \right) P_0 + \frac{\chi}{1+\chi} \frac{q}{4\pi r_s^2} \right] \hat{r}_s \\
&= \left[\frac{1}{1+\chi} P_0 + \frac{\chi}{1+\chi} \frac{q}{4\pi r_s^2} \right] \hat{r}_s
\end{aligned}$$

Bundet romladning er gitt ved:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\rho_{vb}}} &= -\nabla \cdot \vec{P} = -\left[\frac{1}{r_s^2} \frac{\partial}{\partial r_s} \left(r_s^2 P_{r_s} \right) \right] \\
&= -\left[\frac{1}{r_s^2} \frac{\partial}{\partial r_s} \left(\frac{r_s^2}{1+\chi} P_0 + \frac{\chi}{1+\chi} \frac{q}{4\pi} \right) \right] \\
&= \underline{\underline{-\frac{2P_0}{(1+\chi) r_s}}}
\end{aligned}$$

Vi finner bundet flateladning ρ_{sb} ved å benytte at

$$\rho_{sb} = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

der $\vec{P}$ er polarisasjonen ved grenseflaten og $\hat{n}$ er overflatenormalen til materialet:

$$\underline{\underline{\rho_{sb,a}}} = \vec{P}(a) \cdot (-\hat{r}_s) = \underline{\underline{-\frac{1}{1+\chi}\left[P_0 + \chi\frac{q}{4\pi a^2}\right]}}$$

$$\underline{\underline{\rho_{sb,b}}} = \vec{P}(b) \cdot \hat{r}_s = \underline{\underline{\frac{1}{1+\chi}\left[P_0 + \chi\frac{q}{4\pi b^2}\right]}}$$

Oppgave 2:

2.1.a) Gauss lov gir oss det elektriske feltet fra en enkelt leder. Ved hjelp av superposisjon kan vi finne et totale feltet fra to ledere. Finner først feltet E_A rundt leder A. Lar integrasjonsflaten være en sylinder med lengde l og felles akse med leder A. Gauss lov gir oss da at

$$\varepsilon_0 E_A(r_c) 2\pi r_c l = \rho_l l$$

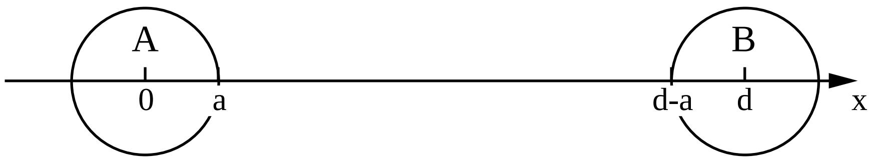
$$\Updownarrow$$

$$E_A(r_c) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r_c}$$

Tilsvarende får vi fra leder B (i et annet koordinatsystem)

$$E_B(r_c) = \frac{-\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r_c}$$

For å finne potensialforskjellen mellom de to lederne, summerer vi disse to bidragene og integrerer over den rette linjen som går korteste vei fra A til B, se figur.



Det totale feltet på x-aksen mellom lederne blir (merk at bidraget fra B virker i samme retning som bidraget fra A)

$$E_{tot}(x) = E_A(x) + E_B(d-x) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)$$

Potensialet til leder B relativt leder A blir da:

$$
\begin{aligned}
V_{BA} &= -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{d-a}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right) \\
&= -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(x)-\ln(d-x)\right]_a^{d-a} \\
&= -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(d-a)-\ln(a)-\left(\ln(a)-\ln(d-a)\right)\right] \\
&= \frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{d-a}\right) \\
&\approx \frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{d}\right)
\end{aligned}
$$

Vi har i siste overgang benyttet at a<<d. Størrelsen V_{BA} er negativ, hvilket betyr at A har høyere potensiale enn B. Potensialforskjellen V_0 blir altså

$$\underline{\underline{V_0 \approx \frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{a}\right)}}$$

2.1.b) Finner kapasitansen C ved

$$C = \frac{\rho_l l}{V_o}$$

slik at kapasitans pr. lengdeenhet blir

$$\underline{\underline{\frac{C}{l}}} = \frac{\rho_l}{\frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{a}\right)} = \underline{\underline{\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{a}\right)}}}$$

Lagret elektrostatisk energi pr. lengdeenhet finner vi da som

$$\underline{\underline{\frac{W_e}{l}}} = \frac{1}{2l}CV_0^2 = \frac{1}{2}\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{a}\right)}\left(\frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{a}\right)\right)^2 = \underline{\underline{\frac{\rho_l^2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{a}\right)}}$$

2.1.c) Elektrisk kraft pr. lengdeenhet av leder B:

$$\frac{F_e}{l} = (-\rho_l)E_A = -\rho_l\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 d} = \frac{-\rho_l^2}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

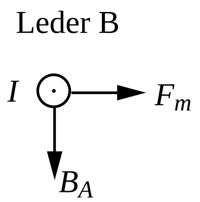
Det negative fortegnet betyr at kraften pr. lengdeenhet på B har motsatt retning av det elektriske feltet fra leder A. Dette betyr at de to lederne trekkes mot hverandre av den elektriske kraften.

2.1.d) Hvis lederne er nær hverandre, vil deres ladninger tiltrekke hverandre i en slik grad at vi ikke lenger kan anta at ladningene ligger jevnt fordelt over ledernes omkrets. Dermed blir ikke feltstyrken lenger radiell og sylindersymmetrisk, slik vi fant i punkt 2.1.a).

2.2.a) Den magnetiske kraften på leder B kan vi finne ved

$$d\vec{F}_m = I_B d\vec{l} \times \vec{B}_A = I d\vec{l} \times \vec{B}_A$$

Ved å bruke høyrehåndsregelen ser vi at det magnetiske feltet B_A fra leder A vil virke på leder B med retning som vist i figuren under. Siden strømmen i leder B har retning ut av papirplanet, vil den resulterende magnetiske kraften ha motsatt retning av den elektriske kraften vi fant i 2.1.c).



Finner først B_A ved hjelp av Amperes lov:

$$\oint_l \vec{H}_A \cdot d\vec{l} = I_A = I$$

der integrasjonslinjen l er en sirkel om leder A med radius d. Av symmetrigrunner må feltet være konstant under denne integrasjonen, slik at vi finner

$$2\pi d H_A(d) = I \quad \Rightarrow \quad B_A(d) = \mu_0 H_A(d) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

Dermed finner vi at den magnetiske kraften pr. lengdeenhet er gitt som

$$\underline{\underline{\frac{F_m}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}}}$$

2.3.a) Elektrisk og magnetisk kraft har motsatt retning, så det skulle derfor være fullt mulig å velge en R slik at netto kraft bli lik null. Størrelsen på motstanden finner vi ved å kreve at

$$\frac{F_e}{l} = \frac{F_m}{l}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\rho_l^2}{2\pi\varepsilon_0 d} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} = \frac{\mu_0}{2\pi d}\left(\frac{V_0}{R}\right)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{R}} = \frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}V_0}{\rho_l} = \underline{\underline{\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\ln(\frac{d}{a})}}$$

Oppgave 3:

a) Siden de magnetiske delene av kretsen antas å ha uendelig permeabilitet, er det bare gapene som vil bidra til kretsens reluktans. Reluktansen til luftgapet og en pakning er henholdsvis gitt som

$$\Re_g = \frac{x}{\mu_0 2a^2}$$

og

$$\Re_p = \frac{t}{\mu_0 a^2}$$

Den totale reluktansen blir dermed

$$\underline{\underline{\Re_{tot}}} = \Re_g + \Re_p \| \Re_p = \Re_g + \frac{\Re_p}{2} = \underline{\underline{\frac{x+t}{2\mu_0 a^2}}}$$

Finner fluksen gjennom spolen:

$$\Psi_m = \frac{N_1 I_1}{\Re_{tot}} = \frac{2\mu_0 a^2 N_1 I_1}{x+t}$$

Selvinduktansen er da gitt ved

$$\underline{\underline{L_1}} = \frac{\Lambda}{I_1} = \frac{N_1\Psi_m}{I_1} = \underline{\underline{\frac{2\mu_0 a^2 N_1^2}{x+t}}}$$

b) Vi antar at feltet er konstant i gapene. I luftgapet har vi da at

$$\underline{\underline{B_g}} = \frac{\Psi_m}{s_g} = \frac{2\mu_0 a^2 N_1 I_1}{(x+t)2a^2} = \underline{\underline{\frac{\mu_0 N_1 I_1}{x+t}}}$$

Av symmetrigrunner må fluksen Ψ_m fordele seg likt på de to mulige veiene, slik at B-feltet i pakningene er gitt ved

$$\underline{\underline{B_g}} = \frac{\Psi_m}{2s_p} = \frac{2\mu_0 a^2 N_1 I_1}{2(x+t)a^2} = \underline{\underline{\frac{\mu_0 N_1 I_1}{x+t}}}$$

c) Det enkleste er å beregne totalenergien ved å bruke resulatet fra a):

$$\underline{\underline{W_m}} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 = \underline{\underline{\frac{\mu_0 a^2 N_1^2 I_1^2}{x+t}}}$$

Alternativt kan energien beregnes ved å integrere opp energitetthetene i gapene:

$$\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{2} \int_{v_g} \vec{B}_g \cdot \vec{H}_g \, dv + \int_{v_p} \vec{B}_p \cdot \vec{H}_p \, dv \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 N_1 I_1}{x+t} \right)^2 \left[\int_{v_g} dv + 2 \int_{v_p} dv \right] \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 N_1 I_1}{x+t} \right)^2 \left[2xa^2 + 2ta^2 \right] \\
&= \frac{a^2}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0 N_1 I_1}{x+t} \right)^2 (x+t) \\
&= \frac{\mu_0 a^2 N_1^2 I_1^2}{x+t}
\end{aligned}$$

d) Den magnetiske kraften som virker på stempelet er gitt ved

$$F_m = \frac{\partial W_m}{\partial x} = -\frac{\mu_0 a^2 N_1^2 I_1^2}{(x+t)^2}$$

Det negative fortegnet betyr at kraften vil (forsøke å) få x til å avta.

Alternativt kan man benytte at kraft pr. flateenhet i luftgapet er $B^2/(2\mu_0)$:

$$F_m = 2a^2 \cdot \frac{B^2}{2\mu_0} = -\frac{\mu_0 a^2 N_1^2 I_1^2}{(x+t)^2}$$

For at at den magnetiske kraften akkurat skal motvirke tyngdekraften må:

$$|F_m| = mg$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\mu_0 a^2 N_1^2 I_1^2}{(x+t)^2} = mg$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{I_1 = \frac{x+t}{aN_1} \sqrt{\frac{mg}{\mu_0}}}}$$

e) Den magnetiske kraften øker når x minker. Det betyr at dersom stempelet beveges litt nedover, blir løftekraften mindre, og stempelet vil falle ned. Dersom stempelet beveges litt oppover, blir den magnetiske løftekraften større enn tyngdekraften, og stempelet vil løftes til x blir lik null. Stillingen med x forskjellig fra null er altså ustabil.