NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
AVDELING FOR ELEKTRO- OG DATATEKNIKK
INSTITUTT FOR FYSIKALSK ELEKTRONIKK

44015 ELEKTROMAGNETISME

LØSNINGSFORSLAG, EKSAMEN AUGUST 1994

Oppgave 1

1.1.a) Siden volumet av kula er $\frac{4}{3}\pi a^3$, er romladningstettheten

$$\underline{\underline{\rho_v = \frac{3Q}{4\pi a^3}}}$$

1.1.b) Vi benytter Gauss lov:

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{en} = \int_v \rho_v dv$$

der $d\vec{s}$ er den utadrettede overflatenormalen til overflaten s. Vi velger å la s være en kuleflate konsentrisk med romladningen. Av symmetrigrunner må feltet over alt være radielt rettet ut fra romladningens sentrum, og feltstyrken kan bare være en funksjon av avstanden r fra samme sentrum. Vi kan derfor skrive

$$4\pi r^2 \varepsilon_0 E(r) = \int_v \rho_v dv = \begin{cases} \rho_v \frac{4}{3}\pi r_s^3 = Q\left(\frac{r_s}{a}\right)^3 & , r_s < a \\ Q & , r_s \geq a \end{cases}$$

Dermed får vi at

$$\underline{\underline{E(r) = \begin{cases} \frac{Qr_s}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & , r_s < a \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_s^2} & , r_s \geq a \end{cases}}}$$

1.1.c) $V(\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad V(r) = -\int_\infty^r E(r)dr$

For r≥a:

$$\underline{\underline{V(r)}} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r_s^2} dr_s = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r_s}\right]_r^\infty = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}}} \qquad , r \geq a$$

For r<a:

$$\underline{\underline{V(r)}} = V(a) + \int_r^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a^3} r_s dr_s$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a} + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_o a^3}\left[r_s^2\right] = \underline{\underline{\frac{Q}{8\pi\varepsilon_o a}\left[3 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \qquad ,r < a}}$$

1.1.d) Kan beregne den elektrostatiske energien på to måter:

i) $$W_e = \int_v \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dv$$

ii) $$W_e = \int_v \frac{1}{2}\rho_v V dv$$

Vi benytter første uttrykk:

$$\underline{\underline{W_e}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_v E^2 dv$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left[\int_a^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_s^2}\right)^2 4\pi\varepsilon_0 r_s^2 dr_s + \int_0^a \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\right)^2 4\pi\varepsilon_0 r_s^4 dr_s\right]$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\int_a^\infty \frac{dr_s}{r_s^2} + \int_0^a r_s^4 dr_s\right]$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{5a}\right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}}}$$

1.1.e) Arbeid utført finner vi ved å benytte definisjonen for elektrisk potensial:

$$\underline{\underline{\Delta W}} = Q_1 \Delta V = Q_1(V(0) - V(a))$$

$$= Q_1\left(\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\right) = \underline{\underline{\frac{Q_1 Q}{8\pi\varepsilon_0 a}}}$$

1.2.a) Uendelig langt fra hverandre vil de N kulene ikke ha noen virkning på hverandre. Ei kule med ladning Q/N og radius a_1 vil ha elektrostatisk energi

$$\frac{3(Q/N)^2}{20\pi\varepsilon_0 a_1}$$

slik at den totale elektrostatiske energien for det nye systemet vil være

$$W_e = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a_1 N}$$

Sammenligner vi dette med uttrykket fra 1.1.d) ser vi at den samlede energien vil være uforandret dersom radius i kulene er

$$\underline{\underline{a_1 = \frac{a}{N}}}$$

Oppgave 2:

a) Grensebetingelsene er:

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{1}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = J_s \overset{\text{materialet er ikke-ledende}}{\Rightarrow} H_{1t} = H_{2t} \tag{2}$$

Antar at feltene kun har ϕ-komponent.

Skriver $\vec{B} = B_\phi \hat{\phi}$. Siden $\hat{\phi}$ står normalt på grenseflatene, vil (1) være oppfylt dersom B_ϕ har samme verdi i vakuum som i det magnetiske materialet.

(2) er automatisk oppfylt når $\vec{H}$ ikke har tangential-komponent på grenseflaten.

Siden lederne har neglisjerbar veggtykkelse, går strømmen bare som flatestrøm ved $r_c = a$ og $r_c = b$. Dermed får vi :

r_c<a:

$$\underline{\underline{\vec{B} = \vec{H} = \vec{0}}}$$

a<r_c<b:

$$\begin{gathered}\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{en} \\ \Rightarrow H_m \pi r_c + H_v \pi r_c = I\end{gathered} \tag{3}$$

Indeks m og v refererer til hhv. magnetisk materiale og vakuum.

$$\begin{gathered}B_m = B_v \\ \Rightarrow \mu_0 \mu_r H_m = \mu_0 H_v\end{gathered} \tag{4}$$

(3) og (4) gir :

$$\underline{\underline{\vec{H}_m = \frac{I}{\pi(1+\mu_r) r_c} \hat{\phi}}}$$

$$\underline{\underline{\vec{H}_v = \frac{\mu_r I}{\pi(1+\mu_r) r_c} \hat{\phi}}}$$

$$\underline{\underline{\vec{B}_m = \vec{B}_v = \frac{\mu_0 \mu_r I}{\pi(1+\mu_r) r_c} \hat{\phi}}}$$

b<r_c:

$$\underline{\underline{\vec{B} = \vec{H} = \vec{0}}}$$

b) Selvinduktansen pr. lengdeenhet blir:

$$\underline{L} = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi(1+\mu_r)} \int_a^b \frac{1}{r_c} dr_c = \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi(1+\mu_r)} \left[\ln r_c\right]_a^b = \underline{\underline{\frac{\mu_0 \mu_r}{\pi(1+\mu_r)} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

c) Strømmen går som en overflatestrøm og kan beregnes fra

$$\vec{J}_s = \hat{n}_{21} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)$$

Vi velger å la $\hat{n}_{21}$ ha retning ut fra sentrum av kjernen, dvs. $\hat{n}_{21} = \hat{r}_c$

r_c=a:

$$\underline{\underline{\vec{J}_s}} = \hat{n}_{21} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = H_1(\hat{r}_c \times \hat{\phi}) = \begin{cases} H_m\big|_{r_c=a}\hat{z} = \dfrac{I}{\pi(1+\mu_r)a}\hat{z} & \text{(mot magnetisk materiale)} \\ H_v\big|_{r_c=a}\hat{z} = \underline{\underline{\dfrac{\mu_r I}{\pi(1+\mu_r)a}}}\hat{z} & \text{(mot vakuum)} \end{cases}$$

r_c=b:

$$\underline{\underline{\vec{J}_s}} = \hat{n}_{21} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = -H_2(\hat{r}_c \times \hat{\phi}) = \begin{cases} -H_m\big|_{r_c=b}\hat{z} = -\dfrac{I}{\pi(1+\mu_r)b}\hat{z} & \text{(mot magnetisk materiale)} \\ -H_v\big|_{r_c=b}\hat{z} = -\underline{\underline{\dfrac{\mu_r I}{\pi(1+\mu_r)b}}}\hat{z} & \text{(mot vakuum)} \end{cases}$$

d) Generelt gjelder at

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$$

og for et lineært materiale (dvs. ikke permanent magnetisert) har vi at

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Dette gir:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\vec{M}}} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{H} \\ &= (\mu_r - 1)\vec{H} \\ &= H_m(\mu_r - 1)\hat{\phi} \\ &= \underline{\underline{\frac{(\mu_r - 1)I}{\pi(\mu_r + 1)r_c}}}\hat{\phi} \end{aligned}$$

e) Bunden overflatestrømtetthet $\vec{J}_{sm}$ er gitt ved

$$\vec{J}_{sm} = \vec{M} \times \hat{n}$$

der $\hat{n}$ er den utadrettede overflatenormalen til det magnetiske materialet. Vi fant at magnetiseringen kun har komponent i ϕ-retning, slik at den bundne flatestrøm-tettheten kun vil være forskjellig fra null i grenseflaten mot inner- og ytterleder. På overflaten mot ytterlederen finner vi at

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\vec{J}_{sm}}} &= \vec{M}(b) \times \hat{r}_c \\
&= \frac{(\mu_r - 1)I}{\pi(\mu_r + 1)b}\,\hat{\phi} \times \hat{r}_c \\
&= \underline{\underline{-\frac{(\mu_r - 1)I}{\pi(\mu_r + 1)b}\,\hat{z}}}
\end{aligned}$$

og på overflaten mot innerlederen

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\vec{J}_{sm}}} &= \vec{M}(a) \times (-\hat{r}_c) \\
&= \frac{(\mu_r - 1)I}{\pi(\mu_r + 1)a}\,\hat{\phi} \times (-\hat{r}_c) \\
&= \underline{\underline{\frac{(\mu_r - 1)I}{\pi(\mu_r + 1)a}\,\hat{z}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3

3.1) Vet at

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$$

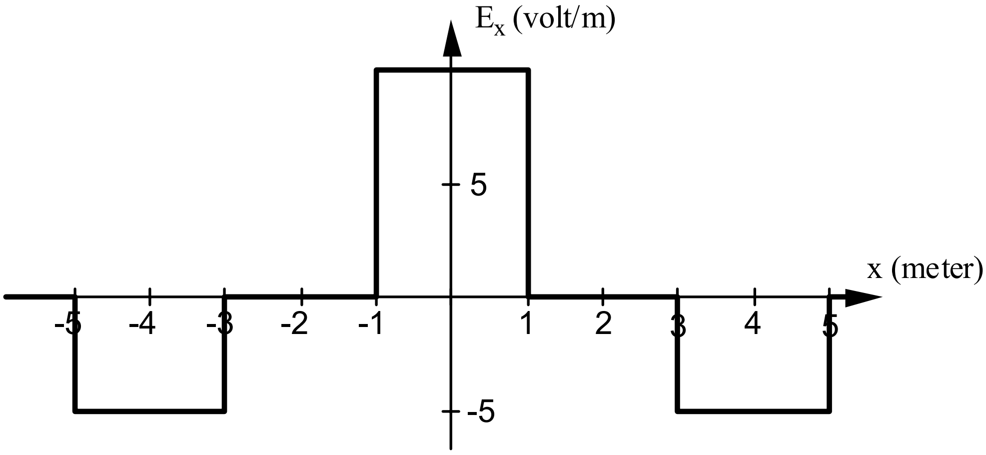
Dette gir at

$$\begin{aligned}
\rho_v &= -\varepsilon_0 \nabla^2 V \\
&= -\varepsilon_0 \left[\frac{1}{r_s^2} \frac{\partial}{\partial r_s}\left(r_s^2 \frac{\partial V}{\partial r_s} \right) + \frac{1}{r_s^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right] \\
&= -\varepsilon_0 \left[\frac{A\cos\theta}{r_s^2} \frac{\partial}{\partial r_s}\left(r_s^2\, 3r_s^2 \right) + \frac{A r_s^3}{r_s^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,(-\sin\theta) \right) \right] \\
&= -\varepsilon_0 \left[\frac{A\cos\theta}{r_s^2} 12 r_s^3 - \frac{A r_s}{\sin\theta} 2\sin\theta\cos\theta \right] \\
&= -\varepsilon_0 \left[12 A r_s \cos\theta - 2 A r_s \cos\theta \right] \\
&= \underline{\underline{-10\varepsilon_0 A r_s \cos\theta}}
\end{aligned}$$

3.2) Sammenhengen mellom elektrisk feltstyrke og potensial er gitt ved

$$\vec{E} = -\nabla V \quad \Rightarrow \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Skisse av x-komponenten til feltstyrken:



3.3) Elektromotorisk spenning er gitt ved

$$\text{emf} = -\frac{d\Psi_m}{dt}$$

der Ψ_m er fluksen gjennom sløyfa:

t<0:	$\Psi_m(t) = 0$	$\Rightarrow \text{emf} = 0$
0<t<L/2U:	$\Psi_m(t) = -\mu_0 H \frac{L}{2} U\,t$	$\Rightarrow \text{emf} = \mu_0 H \frac{L}{2} U$
L/2U<t<L/U:	$\Psi_m(t) = -\mu_0 H \left(\frac{L}{2}\right)^2$	$\Rightarrow \text{emf} = 0$
L/U<t<3L/2U:	$\Psi_m(t) = -\mu_0 H \frac{L}{2}\left[\frac{3L}{2} - U\,t\right]$	$\Rightarrow \text{emf} = -\mu_0 H \frac{L}{2} U$
3L/2U<t:	$\Psi_m(t) = 0$	$\Rightarrow \text{emf} = 0$

Skisse: