UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKALSK ELEKTRONIKK

44015 ELEKTROMAGNETISME
LØSNINGSFORSLAG, EKSAMEN AUGUST 1993

Oppgave 1:
Vi bruker at: $\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q_{en}$

hvor $d\vec{s}$ er en vektor som har størrelse lik arealet av flateelementet ds og retning langs den utadrettede flatenormalen. Q_{en} ("enclosed") er den totale ladning innenfor den lukkede integrasjonsflaten s, som er en kuleflate og har samme senter som ladningen Q_T. Av symmetrigrunner blir feltet radielt rettet, og av samme grunn kan feltet bare være en funksjon av r_s (= sfærisk koordinat), slik at vi kan skrive $\vec{E} = E(r_s)\hat{r}_s$. Her er $\hat{r}_s$ enhetsvektor i radiell retning.

a)

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q_T$$

$$\varepsilon_0 E 4\pi r_s^2 = Q_T$$

$$E = \frac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0 r_s^2}$$

$$\underline{\underline{\vec{E} = \frac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0 r_s^2}\hat{r}_s}}$$

b) For $r_s < a$ er $Q_{en} = 0 \Rightarrow \vec{E}(r_s) = \vec{0}$
For $r_s < a$ er regningen og resultatene som i punkt a), slik at vi har at

$$\underline{\underline{\vec{E} = \begin{cases} \vec{0}, & r_s < a \\ \dfrac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0 r_s^2}\hat{r}_s, & r_s > a \end{cases}}}$$

c) For $r_s < a$ er $Q_{en} = 0 \Rightarrow \vec{E}(r_s) = \vec{0}$
For $a < r_s < b$:
I dette volumet er ladningen Q_T jevnt fordelt, slik at romladningstettheten er

$$\rho_v = \frac{Q_T}{\frac{4\pi}{3}\left(b^3 - a^3\right)}$$

Bruker igjen Gauss´ lov:

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q_{en}$$

$$\varepsilon_0 E 4\pi r_s^2 = \rho_v \frac{4\pi}{3}\left(r_s^3 - a^3\right)$$

$$E = \frac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0 r_s^2}\frac{r_s^3 - a^3}{b^3 - a^3}$$

$$\vec{E}(r_s) = \frac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0 r_s^2}\frac{r_s^3 - a^3}{b^3 - a^3}\hat{r}_s$$

$r_s > b$: Samme regning og resultat som i pkt. a).

Den totale løsningen blir altså

$$\underline{\underline{\vec{E} = \begin{cases} \vec{0}, & r_s < a \\ \dfrac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0 r_s^2}\dfrac{r_s^3 - a^3}{b^3 - a^3}\hat{r}_s, & a < r_s < b \\ \dfrac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0 r_s^2}\hat{r}_s, & b < r_s \end{cases}}}}$$

d) Regner ut den verdi for k som gir totalladning lik Q_T :

$$Q_T = \int_v \rho_v dv = \int_0^a k\, r_s 4\pi r_s^2 dr_s = k4\pi\left[\frac{1}{4}r_s^4\right]_0^a = k\pi a^4$$

$$k = \frac{Q_T}{\pi a^4}$$

For $r_s < a$ får vi:

$$\varepsilon_0 E 4\pi r_s^2 = \int_V \rho_v dv = \int_0^{r_s} \frac{Q_T}{\pi a^4} r_s 4\pi r_s^2 dr_s = \frac{Q_T r_s^4}{a^4}$$

$$E = \frac{Q_T r_s^2}{4\pi\varepsilon_0 a^4}$$

$$\vec{E}(r_s) = \frac{Q_T r_s^2}{4\pi\varepsilon_0 a^4}\hat{r}_s$$

$r_s > a$: Samme regning og resultat som i pkt. a).

Løsningen er altså:

$$\underline{\underline{\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Q_T r_s^2}{4\pi\varepsilon_0 a^4}\hat{r}_s, & r_s < a \\ \dfrac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0 r_s^2}\hat{r}_s, & r_s > a \end{cases}}}}$$

Oppgave 2:

2.1 a) Tilnærmelsen vi benytter for lange, tynne, tettviklede solenoider er at feltstyrken er null utenfor solenoiden, mens den er konstant og rettet langs aksen inne i den. Da kan Ampéres lov skrives

$$H\,l = N\,I \Rightarrow H = \frac{N\,I}{l}$$

Definerer vi en z-akse som går mot høyre på figuren i oppgaveteksten, kan vi oppgi den magnetiske feltstyrken $\vec{H}$ og den magnetiske flukstettheten $\vec{B}$ inne i solenoiden som

$$\underline{\underline{\vec{H} = -\frac{NI}{l}\hat{z}}}$$

$$\underline{\underline{\vec{B} = -\mu_0\frac{NI}{l}\hat{z}}}$$

b) Solenoidens selvinduktans er gitt ved

$$L = \frac{\Lambda}{I}$$

der I er strømmen i solenoiden og Λ er antall tørn N multiplisert med fluks Ψ_m i ett tørn satt opp av solenoiden selv, dvs. $\Lambda = \Psi_m N$. Fra a) kjenner vi $\vec{B}$, som er konstant inne i solenoiden, og vi finner da

$$\Lambda = \Psi_m N = \mu_0\frac{NI}{l}\pi\frac{d^2}{4}N = \mu_0\pi\frac{N^2 d^2 I}{4l}$$

Selvinduktansen blir

$$\underline{\underline{L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_0\pi N^2 d^2}{4l}}}$$

2.2 a) Gjensidig induktans er gitt ved

$$M = \frac{\Lambda_{12}}{I}$$

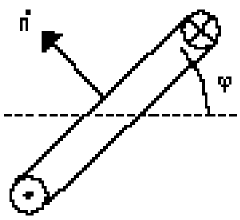
hvor I er strømmen i solenoiden, og Λ_{12} er fluksgjennomgangen i strømsløyfa satt opp av solenoiden:

$$\Lambda_{12} = \Psi_{m12} = B\pi a^2 \sin\varphi$$

Den gjensidige induktansen M finner vi da til å være

$$\underline{\underline{M = \frac{\mu_0\pi N a^2\sin\varphi}{l}}}$$

b)



Sløyfas magnetiske dipolmoment:

$$\underline{\underline{\vec{m} = I_1\pi a^2\hat{n}}}$$

der $\hat{n}$ er enhetsvektor som definert i figuren til venstre.

c) Kraften på et strømelement dl som fører strømmen I_1 er gitt ved

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

Bidrag fra to diametralt motsatte linjeelementer vil kansellere hverandre, slik at

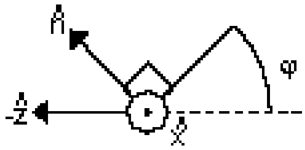
$$\underline{\underline{\vec{F} = \sum d\vec{F} = 0}}$$

Dette kan også vises slik:

$$\vec{F} = \oint_l I\,d\vec{l} \times \vec{B} = I\left(\oint_l d\vec{l}\right) \times \vec{B}$$

Siden $\oint_l d\vec{l} \equiv 0$ (lukket sløyfe), er $\vec{F} = 0$

d) Dreiemomentet finner vi ved



$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = I_1 \pi a^2 \frac{\mu_0 N I}{l} \hat{n} \times (-\hat{z})$$

$$= \underline{\underline{\frac{\mu_0 \pi a^2 N I_1 I \cos\varphi}{l} \hat{x}}}$$

Når cosφ > 0, slik som på figuren, er dreiemomentets retning ut av papirplanet, og sløyfa vil derfor dreies mot urviseren. Dipolmomentet vil søke å rette seg langs magnetfeltet.

Oppgave 3

a) Elektrisk feltstyrke:

$$\underline{\underline{\vec{E}}} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

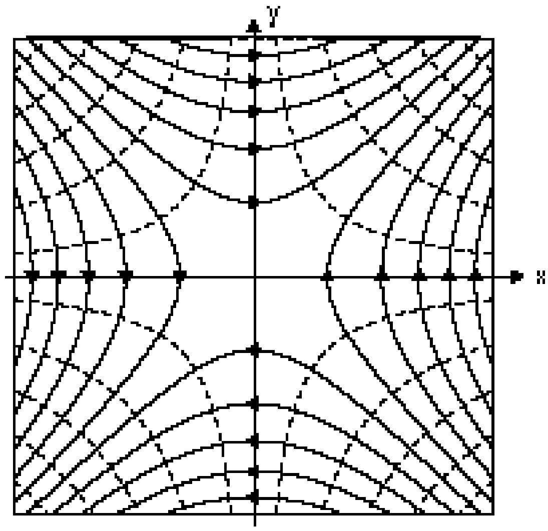
$$= -(-ky)\hat{x} - (-kx)\hat{y}$$

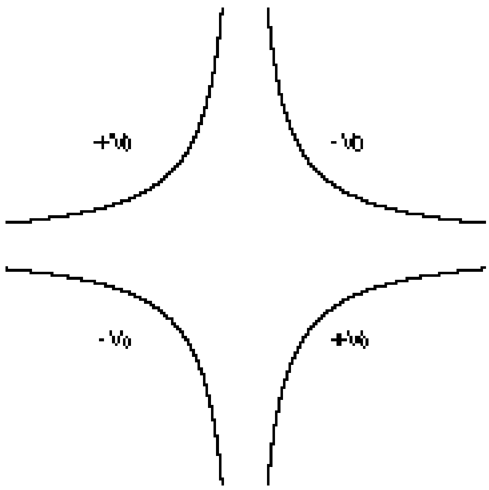
$$= \underline{\underline{k(y\hat{x} + x\hat{y})}}$$

b) Til hjelp når vi skal skissere de elektriske feltlinjene, tegner vi først inn noen ekvipotensialflater. Disse er gitt ved

$$V = -kxy \Rightarrow y = \frac{\text{Konstan t}}{x} \qquad \text{når } x \neq 0$$

Ekvipotensialflatene er altså hyperbler. I tillegg vil x- og y-aksene være ekvipotensialflater (V=0). De elektriske feltlinjene skal stå normalt på ekvipotensialflatene. Skisse under til venstre.





c) Romladningen er gitt ved

$$\underline{\rho_v} = \nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon_0 \nabla \cdot E$$

$$= \varepsilon_0 \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \cdot \langle ky, kx, 0 \rangle$$

$$= \varepsilon_0 k \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial x} \right) = \underline{\underline{0}}$$

d) Ved å benytte fire elektroder som har form som ekvipotensialflater -se figuren over til høyre - kan vi i området nær origo sette opp et felt tilnærmet likt det vi har gitt i oppgaven. Elektrodene er altså hyperbolske sylindre.