

Løsningsforslag  
TFE4120 Elektromagnetisme 29. mai 2017

Oppgave 1

- a) Start med å tegne figur! Tegn inn en Gauss-flate  $S$  som er en sylinder med lengde  $l$  og radius  $r > a$ , med felles akse med lederen. Pga. symmetri vil  $\mathbf{D}$  peke radielt utover, og  $D$  er uavhengig av  $\phi$ . Dermed kan vi forenkle integralet i Gauss' lov:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D2\pi rl = Q'l. \quad (1)$$

Dette gir at  $D = Q'/(2\pi r)$ . Ved å bruke at feltet er null inne i lederen får vi til slutt:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}} & \text{for } r > a, \\ 0 & \text{for } r < a. \end{cases} \quad (2)$$

Her er  $r$  den vanlige sylinderkoordinaten (ut fra lederens akse), og  $\hat{\mathbf{r}}$  enhetsvektoren som peker radielt utover.

- b) Vi er bare interessert i feltet og potensialet over bakken. I henhold til speil-ladningsmetoden, tar vi bort det ledende planet (bakken), og setter inn en speil-linjeladning i  $z = -h$ , med  $-Q'$  som ladning per lengdeenhet. Superposisjon gir da  $\mathbf{E} = E(z)(-\hat{\mathbf{z}})$ , der

$$E(z) = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0(h-z)} + \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0(h+z)}. \quad (3)$$

For å finne potensialet i  $z$ , må vi integrere  $\mathbf{E}$  fra observasjonspunktet i  $z$  til referansen i  $z = 0$ . Dette gir

$$V(z) = \int_0^z E dz = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} [-\ln|z-h| + \ln|z+h|]_0^z = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h+z}{h-z}. \quad (4)$$

I denne deloppgaven er det fort gjort å gå i surr med fortegnet. Det enkleste er derfor å ikke bekymre seg over fortegnet underveis, men heller sjekke at svaret blir slik det må være av fysiske grunner. I dette tilfellet vil både ladningen og speilladningen gi et felt nedover (for  $0 < z < h-a$ ). Og potensialet må være positivt over bakken, siden man da er nærmest den positive ladningen.

- c) Sett  $V(h-a) = V_0$ , så finner du

$$\frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} = \frac{V_0}{\ln \frac{2h-a}{a}} \approx \frac{V_0}{\ln \frac{2h}{a}}, \quad (5)$$

og dermed

$$V(z) = \begin{cases} 0 & \text{for } z \leq 0, \\ \frac{V_0}{\ln \frac{2h}{a}} \ln \frac{h+z}{h-z} & \text{for } 0 < z < h - a, \\ V_0 & \text{for } h - a \leq z \leq h + a. \end{cases} \quad (6)$$

Tallverdiene gir

$$V_1 = V(2m) = 26 \text{ kV}. \quad (7)$$

- d) Potensialet blir null på hodet hans. Dette fordi han er en ganske god leder (saltvann) og er i god kontakt med jorda.
- e) Røret får såkalt “flytende potensial” siden det ikke er i kontakt med noe. Røret plasseres på en ekvipotensialflate, og vil derfor ikke forstyrre potentialet som er regnet ut tidligere. Den får altså potentialet  $V_1$ .

I utgangspunktet er en potensialforskjell på 26 kV mellom beina og hendene til Størker veldig mye. Hvis Størker er fuktig på hendene og føttene, vil resistansen gjennom kroppen være i størrelsesorden  $1 \text{ k}\Omega$ , som gir omtrent 30 A igjennom kroppen. Dette er nesten 1000 ganger mer enn det kroppen tåler hvis strømmen varer over en viss tid. Men hvis strømmen bare varer i kort tid, går det bra. (Her er det ikke forventet at man husker tallverdier, men man bør vite at 26 kV gir en strøm igjennom kroppen som er mye større enn hva mennesker tåler, men at det går bra hvis det er ekstremt kortvarig.)

Jfr. utladning av statisk elektrisitet, der det kan bli tilsvarende store potensialforskjeller. Men fordi det er så lite ladning, er det vanligvis ikke farlig for mennesker – strømmen går så kort tid.

Det som altså skjer, er at negativ ladning fra bakken (indusert fra den positive høyspentlinja) utlades via Størker opp til røret (som i utgangspunktet var nøytralt). Hvor mye ladning som skal utlades mellom bakken og metallrøret, er avhengig av størrelsen til røret. Husk at  $Q = CV$ , der  $C$  er kapasitansen. Og kapasitansen vil bli større dersom rørets areal øker. Hvor lenge strømmen igjennom Størker varer, vil derfor være avhengig av størrelsen til røret.

Konklusjon: Store ledere nær en høyspentlinje kan være farlige dersom de ikke jordes.

- f) Fordi det går en tidsavhengig strøm i høyspentlinja, vil det bli et tidsavhengig magnetfelt, bl.a. mellom røret og bakken. Dette gir en tidsavhengig fluks i sløyfa bestående av røret og bakken, og dermed en emf. Vi gjør et grovt overslag over denne emf'en ved å regne ut  $B$  midt mellom røret og bakken (dvs. i en avstand 9m fra høyspentlinja, som vi tilnærmer til 10m for enkelthets skyld). Bruker Amperes lov og får  $B$ -feltamplituden

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 20 \text{ }\mu\text{T}. \quad (8)$$

Vi regner som om  $B$  er uniformt mellom bakken og røret (i virkeligheten er  $B$  litt sterkere ved røret enn ved bakken, men det betyr ikke mye). Fluksamplituden er derfor

$$\Phi = BS = 20\mu\text{T} \cdot 10\text{km} \cdot 2\text{m} = 0.4 \text{ Tm}^2. \quad (9)$$

Dette gir emf'en

$$e = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 0.4 \text{ Tm}^2 = 40\pi \text{ V} \approx 126 \text{ V}. \quad (10)$$

Dette er tilnærmet like mye som det er mellom en av fasene og jord i vanlig stikkontakter, og kan derfor være farlig. I utregningen har vi brukt at strømmen og dermed fluksen går som en sinus-funksjon, og derivasjonen i Faradays lov gir en ekstra faktor lik vinkelfrekvensen  $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz}$ .

(Vi har brukt kvasistatikk i denne analysen. Det er ok, siden bølgelengden som svarer til frekvensen  $f = 50 \text{ Hz}$  er  $\lambda = c/f \approx 6000 \text{ km}$ , som er like langt som radiusen til jorda, og mye lengre enn 10 km.)

## Oppgave 2

- a) Av symmetrigrunner har feltet kun en  $\phi$ -komponent, og den er bare en funksjon av  $r$ . Så vi kan skrive overalt:

$$\mathbf{H} = H(r)\hat{\phi}. \quad (11)$$

Vi bruker Ampères lov

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}, \quad (12)$$

der  $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$  er strømmen som passerer gjennom et areal begrenset av integrasjonssløyfen. I dette tilfellet velger vi integrasjonssløyfen  $C$  til å være en sirkel med sentrum i midten av koaksialkabelen og radius  $r$ .

For  $r < a$ :

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H(r) = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I, \quad (13)$$

som gir

$$\mathbf{H} = \frac{rI}{2\pi a^2} \hat{\phi} \quad \text{for } r < a. \quad (14)$$

For  $a < r < b$  finner vi

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H(r) = I, \quad (15)$$

som gir

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad \text{for } a < r < b. \quad (16)$$

For  $b < r < b + t$  finner vi

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H(r) = \left( I - \frac{\pi r^2 - \pi b^2}{\pi(b+t)^2 - \pi b^2} I \right) = I \frac{(b+t)^2 - r^2}{2bt + t^2}, \quad (17)$$

som gir

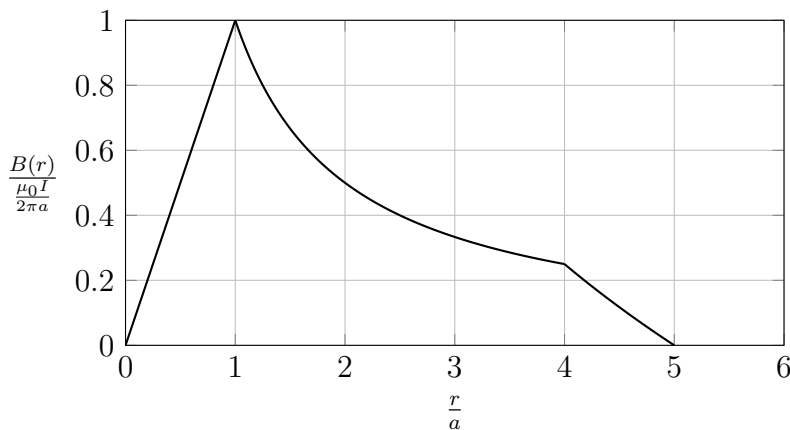
$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \frac{(b+t)^2 - r^2}{2bt + t^2} \hat{\phi} \quad \text{for } b < r < b + t. \quad (18)$$

For  $r > b + t$  finner vi

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H(r) = I - I = 0. \quad (19)$$

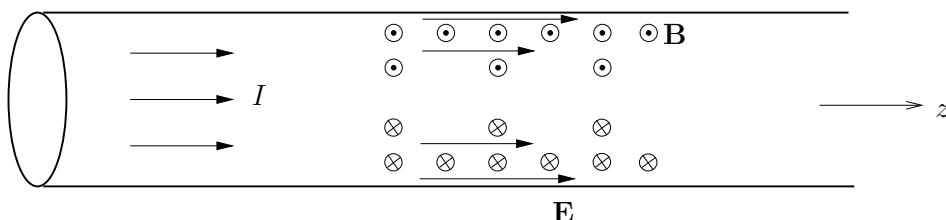
Vi bruker til slutt at  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , og oppsummerer:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2} \hat{\phi} & \text{for } r < a, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} & \text{for } a < r < b, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{(b+t)^2 - r^2}{2bt+t^2} \hat{\phi} & \text{for } b < r < b+t, \\ \mathbf{0} & \text{for } r > b+t \end{cases} \quad (20)$$



Plott av  $B(r)$  for  $b = 4a$  og  $t = a$ . Et slikt plott var det ikke spurt etter i oppgaven, det var spurt etter en skisse. Det viktigste å få med seg på en skisse, er alle karakteristiske egenskaper. Dvs. at toppunktet er ved  $r = a$  og  $B(a) = \mu_0 I / 2\pi a$ , at funksjonen for  $r < a$  er lineært økende, at funksjonen for  $a < r < b$  er en hyperbel og minkende, og at funksjonen går ned til null ved  $r = b + t$ .

- b) Her godtas forklaringer som får fram at ac-strømmen i ledere skaper et tidsvarierende  $\mathbf{B}$ -felt, som igjen inducerer et  $\mathbf{E}$ -felt som får strømmen til å bli større ytterst. Det at strømtettheten er sterkest ytterst, og avtar innover, kalles skinneffekt.



Her er en mer detaljert forklaring for spesielt interesserte: Pga. sylindersymmetri vil strømmen være sylindersymmetrisk fordelt, og vi antar først at strømmen er jevnt fordelt over tverrsnittet (for å se om det kan være en mulig løsning). Dette gir fra forrige deloppgave at

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2} \hat{\phi} \quad \text{for } r < a. \quad (21)$$

Vi setter dette inn i Faradays lov  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , og bruker sylindervektorkoordinater.  $\hat{\phi}$ -komponenten av denne ligningen gir

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 r}{2\pi a^2} \frac{dI}{dt}, \quad (22)$$

der  $E_z$  er  $z$ -komponenten til  $\mathbf{E}$ . Ved å integrere denne ligningen fra  $r = 0$  til  $r$  får vi

$$E_z(r) = E_z(0) + \frac{\mu_0 r^2}{4\pi a^2} \frac{dI}{dt}. \quad (23)$$

Avhengigheten  $r^2$  viser at vi vil ha størst  $E_z$ -felt langs kanten. Dette feltet vil sette igang en større strøm langs kanten enn i midten. Vi får derfor en korleksjon til antagelsen om at strømmen var jevnt fordelt.

Vi kan plugge den nye strømmen tilbake, og iterere til det konvergerer. Da vil man få den eksakte løsningen. Man kunne evt. i stedet la strømfordelingen være en ukjent funksjon  $J(r)$ , og bruke  $J = \sigma E$ , Amperes lov og Faradays lov på differensialform. Da får man en diffiligning som gir den riktige løsningen.

- c) Siden strømmen forutsettes jevnt fordelt over lederne vil strømmen i ytterlederen ikke bidra til feltet på innsiden av ytterlederen. Feltbildet på innsiden av ytterlederen må derfor være konsentriske sirkler om innerlederens akse. Skisse I, V og VI kan dermed elimineres.

Skisse III er ikke brukbar fordi feltlinjene på utsiden av ytterlederen ikke inneholder noe bidrag fra strømmen i ytterlederen (skissen viser feltbildet fra innerlederen alene).

Skisse IV er ikke brukbar fordi feltet har divergens ved ytterlederen (alle magnetiske feltlinjer må "bite seg selv i halen").

Skisse I, IV og VI er dessuten ikke brukbare fordi feltet må være forskjellig fra null utenfor ytterlederen (feltet fra de to lederne kan umulig kompensere hverandre overalt).

- d) Vi legger merke til at feltlinjene for  $\mathbf{B}$  knekker på den indre overflaten til ytterlederen. Dette betyr at enten tangensialkomponenten eller normalkomponenten til  $\mathbf{B}$  er diskontinuerlig. Men fra grensebetingelsen for  $\mathbf{B}$  vet vi at normalkomponenten må være kontinuerlig, så da er det tangensialkomponenten som er diskontinuerlig. Materialet er ifølge oppgaven umagnetisk, så det betyr at  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ . Dermed er tangensialkomponenten av  $\mathbf{H}$  diskontinuerlig. Da har vi ifølge grensebetingelsen for  $\mathbf{H}$  en flatestrøm på den indre overflaten til ytterlederen.

## Oppgave 3

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)		x		
b)	x			
c)				x
d)				x
e)	x			