Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektroniske systemer

Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme august 2017

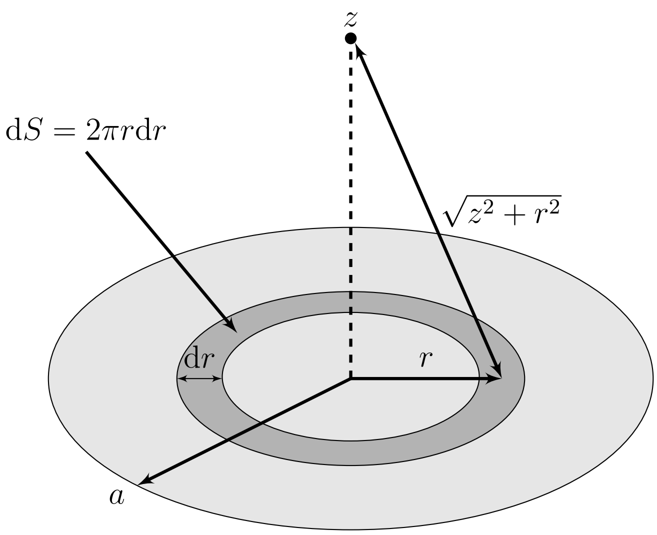
Oppgave 1

a) Potensialet er gitt av

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{disk}} \frac{\rho_\text{s}\mathrm{d}S}{R}, \tag{1}$$

der R er avstanden fra ladningselementet til observasjonspunktet og $\mathrm{d}S$ et overflateelement. Fra figuren under ser vi at $\mathrm{d}S = 2\pi r\mathrm{d}r$ og $R^2 = r^2 + z^2$. Derivasjon gir $2R\mathrm{d}R = 2r\mathrm{d}r$ så vi kan uttrykke

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{2\pi\rho_\text{s}}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a \frac{r\mathrm{d}r}{R} \\ &= \frac{\rho_\text{s}}{2\epsilon_0}\int_z^{\sqrt{z^2+a^2}} \frac{R\mathrm{d}R}{R} \\ &= \frac{\rho_\text{s}}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{z^2+a^2} - z\right). \end{aligned} \tag{2}$$



b) Det elektriske feltet er gitt av $\mathbf{E} = -\nabla V$. Her er $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$ pga. symmetrien i oppgaven. Vi regner ut direkte

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \\ &= \frac{\rho_\text{s}}{2\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(z - \sqrt{z^2+a^2}\right) \\ &= \frac{\rho_\text{s}}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right), \quad \text{for } z > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

På vektorform skriver vi

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}}. \tag{4}$$

c) Først legger vi merke til at begge leddene inne i parantesen er ubenevnte, dvs. de har lik dimensjon slik de må ha. Så ser vi at faktoren utenfor parantesen har samme dimensjon som Coulombs lov for en punktladning

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \tag{5}$$

siden Q/r^2 har samme dimensjon som ρ_s (lik $\mathrm{C/m^2}$).

d) Vi ser at $z/\sqrt{z^2+a^2}$ går mot null når $z \to 0$. Derav

$$\mathbf{E}(z \to 0) = \lim_{z\to 0} \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}} = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}. \tag{6}$$

Hvis $a \to \infty$, får vi samme resultat. Altså, når $z \to 0$ vil feltet fra disken gå mot feltet fra en uendelig stor, plan flate med ladningstetthet ρ_s. Dette er fornuftig siden disken ser uendelig stor ut hvis man er veldig nær.

Som en ekstra sjekk, kan vi bruke Gauss' lov (evt. grensebetingelsen for **D**-feltet), sammen med symmetrien, til å vise at

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}, \quad z > 0, \tag{7}$$

for et uendelig plan.

Videre kan vi se på yttergrensen $z \to \infty$. Da går feltet mot null, slik det må gjøre for en ladningsfordeling med endelig utstrekning. For store (men ikke uendelige) z, finner vi dessuten at feltet fra disken nærmer seg feltet fra en punktladning (med samme ladning):

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2}, \tag{8}$$

når a/z er en liten størrelse. Bruker vi at den totale ladningen til disken er $Q_\mathrm{s} = \rho_\mathrm{s}\pi a^2$, finner vi

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2}\right)\right]\hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{\rho_\mathrm{s}}{4\epsilon_0}\frac{a^2}{z^2}\hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{Q_\mathrm{s}}{4\pi\epsilon_0 z^2}\hat{\mathbf{z}}.\end{aligned} \tag{9}$$

Dette uttrykket ser ut som Coulombs lov. Når vi er veldig langt unna disken i forhold til dens radius, vil altså disken "se ut som en punktladning".

En siste, litt grundig sjekk er å regne ut **E** fra disken direkte fra Coulombs lov (ved å integrere opp bidragene fra punktladningene $\rho_\mathrm{s}\mathrm{d}S$).

Oppgave 2

a) Hvis man husker uttrykket for reluktans, kan man bruke det til å regne på den magnetiske kretsen akkurat slik man ville regnet på en tilsvarende elektrisk krets (dvs. man får en parallellkopling av reluktansene til pakningene, i serie med reluktansen til gapet). Her gjør vi det i stedet fra starten av, det er like lett, og man slipper å huske noe. Tverrsnittsfluksen Φ_{tverrsn} i den midterste delen deles likt på de to armene pga. symmetri. Uttrykt ved Φ_{tverrsn} er derfor H i luftgapet $\Phi_{\text{tverrsn}}/(2\mu_0 a^2)$ mens H i pakningene er $(\Phi_{\text{tverrsn}}/2)/(\mu_0 a^2)$, dvs. like stort. I kjernen og stempelet er H-feltet null. Vi bruker nå Amperes lov på en kurve som går opp i den sentrale delen, og ned igjennom den høyre armen. Det gir

$$Hx + Ht = NI, \tag{10}$$

og derfor

$$H = \frac{NI}{x+t}. \tag{11}$$

Dette gir at tverrsnittsfluksen i den midterste delen er

$$\Phi_{\text{tverrsn}} = \mu_0 \frac{2a^2 NI}{x+t}. \tag{12}$$

Selvinduktansen blir dermed

$$L = \frac{N\Phi_{\text{tverrsn}}}{I} = \frac{2\mu_0 a^2 N^2}{x+t}. \tag{13}$$

b)

$$W_{\text{m}} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\mu_0 a^2 N^2 I^2}{x+t}, \tag{14}$$

og

$$W_{\text{m}} = \int_{\text{gap og to pakninger}} \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \mathrm{d}v. \tag{15}$$

Fra utregningen i forrige deloppgave har vi at

$$H = \frac{NI}{x+t} \tag{16}$$

både i pakningene og i gapet. Dette gir

$$W_{\text{m}} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 (2\cdot a^2 t + 2a^2 x) = \frac{\mu_0 a^2 N^2 I^2}{x+t}. \tag{17}$$

c) Den magnetiske kraften som virker på stempelet er gitt ved

$$\mathbf{F} = \nabla W_{\text{m}} = -\hat{\mathbf{x}}\frac{\mu_0 a^2 N^2 I^2}{(x+t)^2}. \tag{18}$$

Det negative fortegnet betyr at kraften vil (forsøke å) få x til å avta. For at at den magnetiske kraften akkurat skal motvirke tyngdekraften må

$$\frac{\mu_0 a^2 N^2 I^2}{(x+t)^2} = mg, \tag{19}$$

som gir

$$I = \sqrt{\frac{mg}{\mu_0}}\frac{x+t}{aN}. \tag{20}$$

d) Den magnetiske kraften øker når x minker. Det betyr at dersom stempelet beveges litt nedover, blir løftekraften mindre, og stempelet vil falle ned. Dersom stempelet beveges litt oppover, blir den magnetiske løftekraften større enn tyngdekraften, og stempelet vil løftes til x blir lik null. Stillingen med x forskjellig fra null er altså ustabil.

Oppgave 3

a) Vi har at $\mathbf{E} = -\nabla V$. Og så har vi Gauss' lov, som sier at $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$. Vi antar et lineært og isotropt medium, slik at $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, der ϵ er en skalar. Ved å sette sammen får vi

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = -\nabla \cdot \epsilon \nabla V. \tag{21}$$

For å få den vanlige Poissons ligning, må vi videre anta at ϵ er konstant mhp. romkoordinatene (altså at mediet er homogent). Da får vi

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}. \tag{22}$$

Vi har altså antatt et lineært, isotropt og homogent medium.

Oppgave 4

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				x
b)				x
c)				x
d)	x			
e)			x	