Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme 27. mai 2016

Oppgave 1

a) Av symmetrigrunner må $\mathbf{D}$ være radielt rettet og uavhengig av ϕ, $\mathbf{D} = D(r)\hat{\mathbf{r}}$. Vi lar S være overflaten til en sylinder med radius r og lengde l. Ladningen per lengdeenhet på innerlederen kaller vi Q'. Gauss' lov gir:

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 2\pi r l D(r) = Q_{\text{innenfor } S} = \begin{cases} Q'l, & \text{for } a<r<b \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{1}$$

dvs.

$$D(r) = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi r}, & \text{for } a<r<b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{2}$$

Ved å bruke $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ får vi da $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$, der

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 r}, & \text{for } a<r<b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{3}$$

Vi finner Q' ved bruk av definisjonen av potensial:

$$V(a) - V(b) = V_0 - 0 = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}. \tag{4}$$

Altså får vi

$$Q' = \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{5}$$

Innsatt i (3) gir dette

$$\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}} = \begin{cases} \frac{V_0}{r\ln\frac{b}{a}}\hat{\mathbf{r}}, & \text{for } a<r<b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{6}$$

Det går også an å bruke Gauss' lov på differensialform, $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$, eller Poissons likning $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ til å finne $\mathbf{E}$. Differensialoperatorene uttrykkes da i sylinderkoordinater, og man må bruke at $\rho = 0$ i det dielektriske mediet mellom lederne.

b) Potensial:

$$V(r) = \int_r^b E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} V_0, & \text{for } r<a \\ V_0\frac{\ln\frac{b}{r}}{\ln\frac{b}{a}}, & \text{for } a<r<b \\ 0, & \text{for } r>b. \end{cases} \tag{7}$$

c) Kapasitans per lengdeenhet:

$$C' = \frac{Q'}{V(a) - V(b)} = \frac{Q'}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{8}$$

d) Energitettheten per volumenhet er $w_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$, som blir $w_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ mellom lederne, der det fins felt i dette tilfellet. For å finne energien per lengdeenhet av kabelen må vi integrere over tverrsnittet der det finnes felt:

$$W'_\mathrm{e} = \int_0^{2\pi}\int_a^b w_\mathrm{e} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = 2\pi\int_a^b w_\mathrm{e} r\mathrm{d}r = \frac{\pi\epsilon_0 V_0^2}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{9}$$

Vi ser direkte at dette er lik $\frac{1}{2}C'V_0^2$, som er en annen metode å finne samme svar.

e) Når kabelen er frakoblet, kan det ikke gå ladning til eller fra lederne. Dvs. Q' er gitt av (5). Her skal ikke ϵ_0 byttes ut i uttrykket: Q' skal jo være som før.

Vi bruker så Gauss' lov og finner $\mathbf{D}$, helt likt til det vi gjorde i a). Dvs. $\mathbf{E}$-feltet blir

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi\epsilon(r)r}\hat{\mathbf{r}}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{10}$$

der

$$Q' = \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{11}$$

Satt sammen får vi derfor

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 V_0}{\epsilon(r) r\ln\frac{b}{a}}\hat{\mathbf{r}}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{12}$$

f) Nå har vi koblet til spenningskilden, så da trenger ikke Q' være som før. Vi finner den ved å integrere det elektriske feltet fra a til b og sette lik V_0:

$$V_0 = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q'}{2\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{\epsilon(r)r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\left(\ln\frac{a+d}{a} + \frac{1}{10}\ln\frac{b}{a+d}\right). \tag{13}$$

Ved å finne Q' fra denne ligningen, og sette tilbake i (10), får vi det oppgitte resultatet:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{10V_0}{r\left(10\ln\frac{a+d}{a} + \ln\frac{b}{a+d}\right)}\hat{\mathbf{r}}, & \text{for } a < r \le a+d \\ \frac{V_0}{r\left(10\ln\frac{a+d}{a} + \ln\frac{b}{a+d}\right)}\hat{\mathbf{r}}, & \text{for } a+d < r < b. \end{cases} \tag{14}$$

Legg merke til at feltet er minst 10 ganger sterkere i luftgapet enn i det dielektriske mediet. Hvis luftgapet er lite, $d \ll a$, er feltet også 10 ganger sterkere der enn om det bare hadde vært luft mellom lederne. Det vil derfor lett kunne oppstå gjennomslag (gnist) i luftgapet dersom kabelen brukes for høy spenning.

Oppgave 2

a) Symmetrien betyr at $\mathbf{H} = H\hat{\boldsymbol{\phi}}$, der H er uavhengig av ϕ. Bruker Amperes lov på en sirkulær integrasjonskurve C i midten av toroiden, med radius a:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = H 2\pi a = NI, \tag{15}$$

som gir

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi a}\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{16}$$

b) Siden toroiden er tynn, kan vi si at tverrsnittsfluksen er $BS = \mu HS$. Dermed blir den totale fluksen gjennom toroiden

$$\Phi = NBS = \frac{\mu S N^2 I}{2\pi a}. \tag{17}$$

Dette gir selvinduktansen

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu S N^2}{2\pi a} = \frac{\mu_\mathrm{r}\mu_0 S N^2}{2\pi a}, \tag{18}$$

der den relative permeabiliteten μ_r for materialet kan finnes i tabeller eller datablader.

c) Vi kan fortsatt bruke Amperes lov til å finne $\mathbf{H}$. Utregningen og resultatet blir i dette tilfellet helt like som ovenfor, siden det bare er den frie strømmen som skal være med på høyre siden av loven.

Generelt har vi $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$. Siden nå $\mathbf{H}$ og $\mathbf{M}$ er i $\hat{\boldsymbol{\phi}}$-retning, blir også $\mathbf{B}$ det. Vi får altså

$$\mathbf{B} = B\hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad B = \mu_0(H + M) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi a} + \mu_0 M. \tag{19}$$

Total fluks:

$$\Phi = NBS = \frac{\mu_0 N^2 SI}{2\pi a} + \mu_0 NSM, \tag{20}$$

som gir

$$L = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi a}, \tag{21}$$

som i forrige deloppgave. Dette er fordi M er antatt å være konstant.

d) Den gjensidige induktansen finner vi ved å anta en strøm I_1 i spole 1 og finne fluksen igjennom spole 2. Regningen blir ganske lik som i b), men siden spole 2 har bare en vikling fås

$$L_{12} = \frac{BS}{I_1} = \frac{\mu SN}{2\pi a}. \tag{22}$$

Siden det ikke går strøm i sløyfe 2, blir totalt indusert emf i sløyfe 2 gitt av det som induseres pga. strømmen i sløyfe 1. Den induserte emfen blir altså

$$e_{12} = -L_{12}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu\omega SNI_0}{2\pi a}\sin(\omega t). \tag{23}$$

Dette er spenningen som måles på voltmeteret.

e) Her bruker vi at summen av emf er lik $R_1 I_1$ som i dette tilfellet er null. Dvs.

$$V_1 + e_{11} = 0, \tag{24}$$

der e_{11} er emfen som induseres i spole 1 pga. strømmen i spole 1. Dette gir:

$$V_1 = -e_{11} = L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu\omega S N^2 I_0}{2\pi a}\sin(\omega t). \tag{25}$$

Oppgave 3

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)			x	
b)				x
c)			x	
d)			x	
e)	x			