Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme 17. august 2016

Oppgave 1

a) Vi finner først feltet fra den venstre lederen vha. Gauss' lov. Symmetrien tilsier at feltet fra denne, $\mathbf{E}_1$, er rettet radielt utover fra z-aksen, og at $|\mathbf{E}_1|$ er konstant på en sylinderflate med z-aksen som akse. Dermed gir Gauss' lov på en sylinderflate med radius r og lengde l langs z-aksen at $2\pi r l \epsilon_0 E_1 = Q' l$ og dermed

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}}, \tag{1}$$

for $r > a$. Et tilsvarende resultat fås for den andre lederen, men vi må da huske på at Q' må byttes ut med $-Q'$, og at r og $\hat{\mathbf{r}}$ må byttes ut med hhv. r' og $\hat{\mathbf{r}}'$, som er avstanden og den radielle enhetsvektoren ut fra den *høyre* lederens akse. Om vi summerer de to feltbidragene, fås totalfeltet

$$\mathbf{E} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-d}\right)\hat{\mathbf{x}}, \tag{2}$$

for $a < x < d - a$.

b) Anta potensialet V_0 på den venstre lederen, og 0 på den høyre. Det er altså potensialet V_0 på et observasjonspunkt $x = a$ med referanse i $x = d - a$:

$$V_0 = \int_a^{d-a} E\mathrm{d}x = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\left[\ln|x| - \ln|x-d|\right]_a^{d-a} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} 2\ln(\frac{d}{a} - 1) \approx \frac{Q'}{\pi\epsilon_0}\ln\frac{d}{a}. \tag{3}$$

Kapasitansen blir

$$C' = \frac{Q'}{V_0} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)}. \tag{4}$$

c) Hvis lederne var nær hverandre, ville det elektriske feltet fra den venstre lederen i et observasjonspunkt på den høyre lederen vært sammenlignbart med det elektriske feltet fra ladningene til den høyre. Den venstre lederen ville altså trukket på ladninger i den høyre, slik at vi ikke lenger kan anta at ladningene er jevnt fordelt over overflaten til lederne. Da kan vi ikke lenger forenkle integralet i Gauss' lov, slik vi gjorde ovenfor.

d) Bruker Amperes lov for den venstre lederen, for å finne feltet fra denne lederen alene:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{5}$$

Dette feltet er normalt på strømretningen til den høyre lederen. Kraften på et lengdeelement $\mathrm{d}l$ av den høyre lederen blir derfor $\mathrm{d}F = I\mathrm{d}lB_1$, som gir følgende kraft per lengdeenhet:

$$F' = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}. \tag{6}$$

Ved å bruke høyrehåndsregelen på formelen $\mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}_1$, ser vi at kraften blir frastøtende (dvs. i $\hat{\mathbf{x}}$-retning).

Vi har igjen antatt at $a \ll d$, slik at variasjonen av $\mathbf{B}_1$ over den høyre lederen blir liten, dvs. $\mathbf{B}_1$ antas konstant der.

e) Den elektriske kraften blir tiltrekkende, siden de to lederne har motsatt ladning. Denne kraften er ikke avhengig av R, siden potensialforskjellen er den samme. Derimot er den magnetiske kraften avhengig av R, siden denne kraften er gitt av strømmen. Strømmen kan varieres fra 0 (for $R = \infty$) til ∞ (for $R = 0$). Dermed må det være mulig å finne en R slik at de to kreftene akkurat balanserer.

Den elektriske kraften per lengdeenhet er lik Q' multiplisert med det elektriske feltet fra den venstre lederen. For at kreftene skal balansere, må vi ha

$$\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} = Q' \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 d}, \tag{7}$$

som gir

$$I = Q' \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = cQ', \tag{8}$$

der c er lyshastigheten i vakuum. Altså

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{V_0}{cQ'} = \frac{1}{cC'}. \tag{9}$$

Ved å sette inn for c og C' kan dette alternativt skrives

$$R = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \ln \frac{d}{a}. \tag{10}$$

Oppgave 2

a) Vi bruker Biot-Savarts lov:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{sløyfe}} \frac{I\mathrm{d}\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2}. \tag{11}$$

Her er $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$, og $\mathbf{R}$ er avstandsvektoren fra strømelementet til observasjonspunktet (som er i sentrum av sløyfa). Dvs. $R = a$. Siden $\mathrm{d}\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{R}}$ er ut av papiret for alle $\mathrm{d}\mathbf{l}$ i integralet, og siden $\mathrm{d}\mathbf{l} \perp \hat{\mathbf{R}}$, får vi at $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ (der $\hat{\mathbf{z}}$ peker ut av papiret) og

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{sløyfe}} \frac{I\mathrm{d}l}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{2a}. \tag{12}$$

b) Ringen har linjeladningstetthet $Q' = Q/(2\pi a)$, der Q er den totale ladningen til ringen. Når vinkelhastigheten er ω, har et punkt på ringen beveget seg $a\omega \mathrm{d}t$ i løpet av en tid $\mathrm{d}t$. Ladningen som passerer et gitt punkt er da $Q' a\omega \mathrm{d}t$. Dette betyr at det effektivt sett går en strøm $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = a\omega Q'$. Fra svaret i forrige spørsmål får vi da $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, der

$$B = \frac{\mu_0 \omega Q'}{2}. \tag{13}$$

Alternativt:

$$B = \frac{\mu_0 \omega Q}{4\pi a}. \tag{14}$$

c) Vi kan se på disken som en mengde små ringer, med radius r fra $r = 0$ til $r = a$. Fra forrige svar har vi at feltet fra en av ringene er

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \omega \mathrm{d}Q}{4\pi r}, \tag{15}$$

der $\mathrm{d}Q$ er ladningen til ringen. Hvis denne ringen har tykkelse $\mathrm{d}r$ har den ladningen $\mathrm{d}Q = \rho_\mathrm{s} 2\pi r \mathrm{d}r$. Vi får derfor

$$B = \int_0^a \frac{\mu_0 \omega \rho_\mathrm{s} \mathrm{d}r}{2} = \frac{\mu_0 \omega \rho_\mathrm{s} a}{2} = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi a}, \tag{16}$$

der Q i det siste uttrykket nå er den totale ladningen til disken. Feltet $\mathbf{B}$ har fortsatt retning ut av papiret.

d) Siden $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, holder det å kontrollere at $\omega \rho_\mathrm{s} a$ har samme dimensjon som H. Fra Amperes lov vet vi at dimensjonen til H er $[H] = \mathrm{A/m} = \mathrm{C/(sm)}$. Siden $[\rho_\mathrm{s}] = \mathrm{C/m^2}$, og $[\omega] = 1/\mathrm{s}$ ser vi at $\omega \rho_\mathrm{s} a$ har samme dimensjon som H.

Oppgave 3

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)	x			
b)				x
c)			x	
d)	x			
e)		x		