Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme 21. mai 2015

Oppgave 1

a) Vi superponerer bidrag fra hver punktladning $Q'\mathrm{d}l$ og får

$$V(z) = \oint_{\text{ring}} \frac{Q'\mathrm{d}l}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R}\oint_{\text{ring}} \mathrm{d}l = \frac{2\pi a Q'}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{aQ'}{2\epsilon_0\sqrt{z^2+a^2}}. \quad (1)$$

Her har vi brukt at avstanden R fra et punkt på z-aksen og til linjeelementet $\mathrm{d}l$ er $R = \sqrt{z^2+a^2}$ og derfor konstant under integralet. For bruk i neste deloppgave, uttrykker vi også svaret med den totale ladningen $Q = 2\pi aQ'$:

$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+a^2}}. \quad (2)$$

b) For en ring med radius r og total ladning $\mathrm{d}Q$, har vi fra forrige deloppgave at potensialet er

$$\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+r^2}} \quad (3)$$

En disk kan sees på som mange ringer med stadig større radius r og tykkelse $\mathrm{d}r$. En slik ring har ladningen $\mathrm{d}Q = \rho_\mathrm{s}2\pi r\mathrm{d}r$. Dette gir

$$V(z) = \int_0^a \frac{\rho_\mathrm{s}2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+r^2}} = \int_0^a \frac{\rho_\mathrm{s} r\mathrm{d}r}{2\epsilon_0\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{z^2+a^2} - z\right), \quad (4)$$

der vi har brukt integral ved substitusjon i den siste overgangen.

c) Vi har at $\mathbf{E} = -\nabla V$, og at $\mathbf{E}$ bare har en z-komponent pga symmetrien. Dette gir

$$\mathbf{E} = \frac{aQ'z}{2\epsilon_0(z^2+a^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}} \quad (5)$$

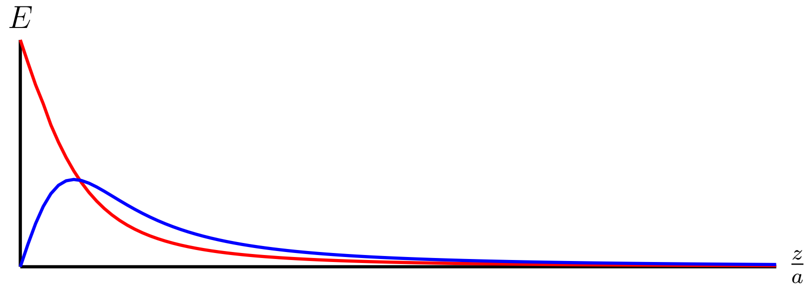
for ringen, og

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}} \quad (6)$$

for disken.

d) Når man skal plotte feltet fra ringen og disken, bør man legge merke til følgende:

Ring: Når $z \to 0$ går feltet mot null. Dette er fornuftig siden felt-bidragene fra ladninger på motstående side av ringen vil kansellere, når observasjonspunktet er i origo. Når $z \gg a$, vil feltet nærme seg feltet fra en punktladning $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$, der $Q = 2\pi aQ'$ er den totale ladningen til ringen. Dermed må det



Figur 1: Feltet fra en ring (blå kurve) og fra en disk (rød kurve). Den røde kurven ender opp på andreaksen i punktet $E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$. Den blå kurven har et maksimum for $z = \frac{a}{\sqrt{2}}$ og $E = \frac{Q'}{3\sqrt{3}\epsilon_0 a}$.

finnes et maksimum et sted i mellom, nærmere bestemt i $z = a/\sqrt{2}$, der $E = \frac{Q'}{3\sqrt{3}\epsilon_0 a}$.

Disk: For $z \gg a$ får vi fortsatt at feltet nærmer seg feltet fra en punktladning, med ladning lik den totale ladningen til disken. Dette kan man se ved å bruke at $(1 + a^2/z^2)^{-1/2} \approx 1 - \frac{a^2}{2z^2}$ når $a^2/z^2 \ll 1$. Når $z \to 0$ går feltet mot det man ville ha hatt for en uendelig flateladning, dvs. $\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$. Dette er rimelig siden planet vil virke uendelig stort når man er veldig nær.

e) Når vinkelhastigheten er ω, har et punkt på ringen beveget seg $a\omega\mathrm{d}t$ i løpet av en tid $\mathrm{d}t$. Ladningen som passerer et gitt punkt er da $Q'a\omega\mathrm{d}t$. Dette betyr at det effektivt sett går en strøm $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = a\omega Q'$.

Siden ringen roterer med konstant hastighet, kan vi eventuelt i stedet se på en hel runde: I løpet av tiden $2\pi/\omega$ har ringen gått en hel runde. Da har det passert en ladning $Q = 2\pi a Q'$. Strømmen er altså

$$I = \frac{Q}{2\pi/\omega} = \frac{2\pi a Q'}{2\pi/\omega} = a\omega Q'. \tag{7}$$

f) Det at ringen roterer med konstant vinkelhastighet, har ingen betydning for **E**-feltet – ladningstettheten i rommet er fortsatt som før. Derimot får vi et **B**-felt i tillegg, pga. strømmen. Denne kan regnes ut vha. Biot-Savarts lov:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{ring}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2}, \tag{8}$$

der $\mathbf{R}$ er avstandsvektoren fra strømelementet til observasjonspunktet i origo. Siden $\mathrm{d}\mathbf{l}$ hele tiden er normalt på $\hat{\mathbf{R}}$ får vi

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \oint_{\text{ring}} |\mathrm{d}\mathbf{l}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} 2\pi a = \frac{\mu_0 I}{2a} = \frac{\mu_0 \omega Q'}{2}, \tag{9}$$

med retning langs z-aksen.

Oppgave 2

a) Symmetrien betyr at $\mathbf{H} = H\hat{\boldsymbol{\phi}}$, der H er uavhengig av ϕ. Bruker Amperes lov på en sirkulær integrasjonskurve C i midten av toroiden, med radius a:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = H2\pi a = NI, \tag{10}$$

som gir

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi a}\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{11}$$

b) Siden toroiden er tynn, kan vi si at tverrsnittsfluksen er $BS = \mu_0 HS$. Dermed blir den totale fluksen gjennom toroiden

$$\Phi = NBS = \frac{\mu_0 SN^2 I}{2\pi a}. \tag{12}$$

Dette gir selvinduktansen

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 SN^2}{2\pi a}. \tag{13}$$

c) For en typisk hysteresekurve, se kompendiet. Arealet representerer tap per periode og per volumenhet i materialet.

d) Strømmen i den første spolen kan f.eks. skrives

$$I = I_0 \sin(2\pi f t). \tag{14}$$

Dette betyr at

$$H(t) = \frac{NI}{2\pi a} = \frac{NI_0}{2\pi a}\sin(2\pi f t). \tag{15}$$

Avlest spenning blir lik emf'en $e_2(t)$ i spole 2. Hvis vi kaller den resulterende flukstettheten $B(t)$, får vi

$$e_2(t) = -N_2 S \frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{16}$$

som vi kan finne $B(t)$ fra ved integrasjon:

$$B(t) = B(0) - \frac{1}{N_2 S}\int_0^t e_2(t)\mathrm{d}t. \tag{17}$$

Hysteresekurva får vi til slutt ved å plotte $B(t)$ mot $H(t)$: For hver t merkes punktet $(H(t), B(t))$ i et HB-koordinatsystem.

Oppgave 3

a) Ta curl til Faradays lov $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ og bruk Ampere-Maxwells lov $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \nabla \times \mathbf{H}}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{18}$$

Bruk vektorformelen $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, der $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ifølge Gauss' lov siden det er ladningsfritt. Resultatet er bølgeligningen

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \tag{19}$$

med bølgehastigheten $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

Oppgave 4

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)	x			
b)			x	
c)				x
d)			x	
e)		x		