Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme august 2015

Oppgave 1

a) Vi starter med å bestemme det elektriske feltet inne i kondensatoren. Vi plasserer en fri ladning Q på innerlederen og en ladning $-Q$ på ytterlederen og bruker Gauss' lov $\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{inne i } S}$. Gaussflaten som vi velger oss er et kuleskall med radius r. Grunnet symmetri har vi $\mathbf{D} = D(r)\hat{\mathbf{r}}$. Gauss' lov gir da

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi r^2 D(r) = Q. \tag{1}$$

Bruk av $D(r) = \epsilon E(r)$ gir

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}. \tag{2}$$

Vi velger ytterlederen som referansepunkt for potensialet slik at

$$V(a) - V(b) = V_0 = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \tag{3}$$

Kapasitansen til kondensatoren er gitt av $C = \frac{Q}{V_0}$:

$$C = \frac{4\pi\epsilon ab}{b-a}. \tag{4}$$

b) Vi ser at når $b - a = d \ll a$ kan vi skrive

$$C \simeq \epsilon\frac{A}{d}, \tag{5}$$

der $A = 4\pi ab$ er overflaten til kondensatoren og d er avstanden mellom platene. Dette uttrykket er likt det for en parallellplatekondensator.

Betraker vi en enkelt ledende kule som grensetilfellet $b \to \infty$ i punkt **a)**, har vi

$$C = 4\pi\epsilon a, \tag{6}$$

for kapasitansen til en kule med radius a.

c) Vi kan ikke nå lenger bruke Gauss' lov til å finne feltet slik som i **a)**, siden det kan tenkes det er frie ladninger i området mellom kuleskallene. I stedet bruker vi at strømmen I som går fra indre til ytre kuleskall kan relateres til strømtettheten og dermed det elektriske feltet:

$$I = J(r)4\pi r^2 = \sigma E(r)4\pi r^2. \tag{7}$$

Altså er

$$E(r) = \frac{I}{4\pi\sigma r^2}. \tag{8}$$

Potensialforskjellen mellom de to kuleskallene blir

$$V(a) - V(b) = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{I}{4\pi\sigma}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \tag{9}$$

Dermed får vi resistansen

$$R = \frac{V(a) - V(b)}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \tag{10}$$

d) Jordingsresistansen fås ved å ta $b \to \infty$:

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma a}. \tag{11}$$

Jordingsresistansen skal være så liten som mulig. Vi bør altså ha σ stor. Hvis det har vært tørke i lang tid, kan det være for tørt i jorda, slik at σ blir for liten.

Oppgave 2

a) Bruk Amperes lov, se f.eks. øving 9. Svar:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N I}{l}\hat{\mathbf{z}}, \tag{12}$$

der $\hat{\mathbf{z}}$ er rettet langs aksen til solenoiden. Retningen til $\hat{\mathbf{z}}$ er slik at den peker langs tommelen når høyre hånd legges rundt solenoiden i strømretningen.

b)

$$L = \frac{N\Phi_{\text{tverrsn}}}{I} = \frac{NB\pi a^2}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^2 N^2}{l}. \tag{13}$$

c) Tverrsnittsfluksen i solenoiden blir $\Phi_{\text{tverrsn}} = \int_{\text{tverrsn}} \mathbf{B}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \pi a^2 B_0 \cos(\omega t)$, siden det er en vinkel ωt mellom $\mathbf{B}_0$ og flatenormalen $\mathrm{d}\mathbf{S}$. Dette gir

$$e = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{tverrsn}}}{\mathrm{d}t} = \pi a^2 B_0 N\omega \sin(\omega t). \tag{14}$$

d) Den oppgitte diffligningen fås ved å bruke at summen av emf er lik RI. Når selvinduktansen ikke kan neglisjeres, bidrar den også med en emf. Sagt på en annen måte: Sløyfa setter også opp et felt, og dette feltet gir et ekstra bidrag $-L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ til emf'en.

e)

$$I = \frac{e}{R} = \frac{\pi a^2 B_0 N\omega \sin(\omega t)}{R}. \tag{15}$$

Momentet finner vi ved å summere momentet på hver vikling:

$$|\mathbf{T}| = NI|\mathbf{S} \times \mathbf{B}_0| = \frac{\pi^2 a^4 B_0^2 N^2 \omega \sin^2(\omega t)}{R}, \tag{16}$$

siden vinkelen mellom solenoidens akse ($\mathbf{S}$) og $\mathbf{B}_0$ er ωt. Retningen vil være langs rotasjonsaksen, men motsatt vei. Dvs. momentet vil prøve å bremse rotasjonen. (Å finne retningen til $\mathbf{T}$ når $0 \leq \omega t \leq \pi$, gjøres ved å bruke høyrehåndsregelen på kryssproduktet $\mathbf{S} \times \mathbf{B}_0$. Seinere, når $\pi < \omega t < 2\pi$, må man i tillegg huske på at I er negativ.)

f) Hvis vi belaster generatoren (solenoiden) mindre, dvs. kobler på en større R, vil strømmen bli mindre. Dermed vil turbinen oppleve mindre bremsing fra $\mathbf{T}$. Siden vannstrømmen er regulert slik at turbinens hastighet er konstant, betyr det at mindre belastning medfører mindre vann som slippes ned fra demningen.

Oppgave 3

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)		x		
b)		x		
c)				x
d)	x			
e)		x		