Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme 23. mai 2013

Oppgave 1

a) Fordi $d \ll a$ neglisjerer vi kanteffektene og regner som om platene har uendelig utstrekning. Da avhenger V bare av x. Poissons ligning gir at $\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}x^2 = 0$, med løsning $V(x) = Ax + B$. Vha. grensebetingelsene $V(0) = V_0$ og $V(d) = 0$ får vi

$$V(x) = V_0\left(1 - \frac{x}{d}\right), \tag{1}$$

mellom platene. Dette gir

$$\mathbf{E}(x) = -\nabla V = \frac{V_0}{d}\hat{\mathbf{x}}. \tag{2}$$

b) Vi kaller ladningen på platen i $x = 0$ for Q. Den er da gitt av $Q = \rho_\mathrm{s} a^2$, der $\rho_\mathrm{s} = \epsilon_0 E(0^+)$ ifølge grensebetingelsen for D-feltet. Kapasitansen blir dermed

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon_0 E a^2}{V_0} = \frac{\epsilon_0 a^2}{d}. \tag{3}$$

c) Poissons ligning gir nå $\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}x^2 = -\rho/\epsilon$. Ved å integrere denne to ganger får vi

$$V(x) = -\frac{\rho}{2\epsilon}x^2 + C_1 x + C_2, \tag{4}$$

der integrasjonskonstantene C_1 og C_2 må finnes vha. grensebetingelsene $V(0) = V_0$ og $V(d) = 0$. Dette gir:

$$V(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon} + \left(\frac{\rho d}{2\epsilon} - \frac{V_0}{d}\right)x + V_0, \quad \text{for } 0 \le x \le d. \tag{5}$$

d) Når ρ er positiv og stor, vil det kreve mye arbeid å føre en positiv testladning inn i området, siden den vil frastøtes av all den positive romladningen. Når ladningen mellom platene blir mye større enn ladningen på platene, dominerer ladningen mellom platene. Da må vi ha et maksimum omtrent midt inne i området, siden det kreves mest arbeid å føre testladningen inn dit.

Potensialet har et maksimum når den deriverte er null, med andre ord når det elektriske feltet er null. Finner først det elektriske feltet:

$$E(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho}{\epsilon}x - \frac{\rho d}{2\epsilon} + \frac{V_0}{d}, \tag{6}$$

gyldig for $0 \le x \le d$. For at potensialet skal ha et maksimum mellom platene, må vi ha $E(x) = 0$ for $0 < x < d$. Dvs.

$$x = \frac{d}{2} - \frac{\epsilon V_0}{\rho d} \quad \text{og } 0 < x < d. \tag{7}$$

Vi ser at når $\rho \to \infty$ blir det maksimum midt mellom platene, som forventet. For at vi skal ha et maksimum mellom platene, ser vi at vi må ha

$$\frac{\epsilon V_0}{\rho d} < \frac{d}{2}, \tag{8}$$

dvs.

$$\rho > \frac{2\epsilon V_0}{d^2}. \tag{9}$$

e) Siden vi fortsatt har luft i gapene på begge sider av den nye platen, får vi fortsatt et potensial på formen $V(x) = A_1 x + B_1$ og $V(x) = A_2 x + B_2$ ved å løse Poissons ligning i hhv. de to gapene. Fordi den nye lederplaten er netto uladd, må det være like mye negativ flateladning på den ene siden som det er positiv flateladning på den andre. Derfor må det være det samme E-feltet på begge sider av platen. Dette gir at $A_1 = A_2$. Vi har dessuten grensebetingelsene $V(0) = V_0$, $V(d/10) = V(9d/10)$ (siden vi har konstant potensial på lederen) og $V(d) = 0$, som kan brukes til å finne A_1, B_1 og B_2:

$$V(x) = \begin{cases} V_0\left(1 - \frac{5x}{d}\right), & \text{for } 0 \le x < \frac{d}{10}, \\ \frac{V_0}{2}, & \text{for } \frac{d}{10} \le x \le \frac{9d}{10}, \\ V_0\left(5 - \frac{5x}{d}\right), & \text{for } \frac{9d}{10} \le x < d, \end{cases} \tag{10}$$

Det elektriske feltet i luftgapene er altså $5V_0/d$. Dette gir en flateladning på lederplaten i $x = 0$ som er $\rho_\mathrm{s} = \epsilon_0 5V_0/d$, så kapasitansen blir

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_\mathrm{s} a^2}{V_0} = \frac{5\epsilon_0 a^2}{d}. \tag{11}$$

Kapasitansen blir altså som for en parallellplatekondensator med gap $d/5$. Det siste resultatet (11) kan også vises ved å regne ut seriekoblingen av to kondensatorer.

Oppgave 2

a) Vi antar at fluksen følger rundt den magnetiske kretsen og får vha. Amperes lov:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = H_\mathrm{luft} 2x + H_\mathrm{kjerne}(\pi a + 2a) = NI, \tag{12}$$

der $H_\mathrm{luft} = \Phi_\mathrm{tverrsn}/(\mu_0 S)$ og $H_\mathrm{kjerne} = \Phi_\mathrm{tverrsn}/(\mu S)$. Dette gir

$$\Phi_\mathrm{tverrsn} = \frac{NI}{\frac{\pi a + 2a}{\mu S} + \frac{2x}{\mu_0 S}}. \tag{13}$$

Feltet i luftgapene blir

$$B = \frac{\Phi_\mathrm{tverrsn}}{S} = \frac{NI}{\frac{\pi a + 2a}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}}. \tag{14}$$

Retningen til feltet er slik at det går rundt kretsen mot klokka.

b) Selvinduktansen blir

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{N\Phi_{\text{tverrsn}}}{I} = \frac{N^2}{\frac{\pi a + 2a}{\mu S} + \frac{2x}{\mu_0 S}}. \tag{15}$$

c) Hvis $\mu \to \infty$ vil $H_{\text{kjerne}} \to 0$. Dermed vil det bare være energi i luftgapene. Feltet er ifølge (14) (med $\mu \to \infty$):

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2x}. \tag{16}$$

Totalenergien blir

$$W_{\text{m}} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot 2xS = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4x^2} xS = \frac{\mu_0 S N^2 I^2}{4x}. \tag{17}$$

Siden strømmen holdes konstant, blir

$$\mathbf{F} = \nabla W_{\text{m}} = -\frac{\mu_0 S N^2 I^2}{4x^2} \hat{\mathbf{x}}. \tag{18}$$

Kraften er i retning av minkende x, dvs. tiltrekkende.

d) Problemet er at vi antok $\mu \to \infty$. Det kan være nyttig å tenke på analogien med en elektrisk krets. Luftgapene blir som motstander (siden reluktansen der er høy), mens kjernen blir som en leder (siden reluktansen der er lav). Hvis vi lar μ bli veldig stor, svarer det til at vi lar lederen nærme seg ideell. Så lenge det er en motstand i kretsen, vil da hele spenningen ligge over motstanden. Hvis vi derimot lar motstanden gå mot null, vil etter hvert spenningen måtte bli liggende over lederen (hvilket betyr at strømmen vil gå mot uendelig).

Vi kan regne mer nøyaktig ved å ta utgangspunkt i (13) og finne energien ved å integrere det resulterende feltet både over kjernen og luftgapene. Alternativt kan vi finne totalenergien ved

$$W_{\text{m}} = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{N^2}{\frac{\pi a + 2a}{\mu S} + \frac{2x}{\mu_0 S}} I^2. \tag{19}$$

Dette gir kraften

$$\mathbf{F} = \nabla W_{\text{m}} = -\frac{\mu_0 S N^2 I^2}{\left(2x + \frac{\mu_0}{\mu}(\pi a + 2a)\right)^2} \hat{\mathbf{x}}. \tag{20}$$

Når $x \to 0$ er denne kraften endelig. Som vi også ser, går kraften mot svaret i forrige delspørsmål når $\mu \to \infty$.

Oppgave 3

a) Fluksen i sløyfa er $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = BS\cos(\omega t)$, siden $\mathbf{B}$ er uniform over sløyfas areas S, og siden vinkelen mellom $\mathbf{B}$ og $\mathbf{S}$ er ωt. Dette gir

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = BS\omega \sin(\omega t). \tag{21}$$

b) Generelt har vi $\sum \text{emf} = RI$. I dette tilfellet er det to bidrag til emf'en: Det (21) pga det påtrykte feltet, og det pga feltet som sløyfa selv produserer. Hvis fluksen pga feltet som sløyfa selv setter opp, er neglisjerbar sammenlignet med fluksen i forrige delspørsmål, får vi $e = RI$. Hvis ikke, får vi et ekstra bidrag til emf'en fra selvinduktansen.

Emf'en fra selvinduktansen kan skrives $-L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$, der L er selvinduktansen til sløyfa. For å kunne neglisjere denne, må altså

$$|L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t| \ll |e|. \tag{22}$$

Dette kan fås til ved at L er liten, eller ved at strømmen er liten. Det siste vil være tilfelle når R er stor.

Mer presist enn "liten" og "stor": Hvis vi antar at $I = e/R$ og setter inn i (22), får vi

$$(L/R)BS\omega^2|\cos(\omega t)| \ll BS\omega|\sin(\omega t)|, \tag{23}$$

som er tilfredsstilt når

$$(L/R)\omega \ll 1. \tag{24}$$

c) Mekanisk moment:

$$\mathbf{T} = I\mathbf{S} \times \mathbf{B} = ISB\sin(\omega t)\hat{\mathbf{x}} = \frac{S^2B^2}{R}\omega\sin^2(\omega t)\hat{\mathbf{x}}, \tag{25}$$

der $\hat{\mathbf{x}}$ er en enhetsvektor som peker ut av papiret. Retningen betyr at momentet prøver å bremse opp rotasjonen. Dette må være korrekt siden det jo tapes energi i resistansen R.

Oppgave 4

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)		x		
b)	x			
c)			x	
d)				x
e)		x		