**Løsningsforslag**
**TFE4120 Elektromagnetisme 25. mai 2013**

## Oppgave 1

**a)** Av symmetrigrunner må det elektriske feltet være radielt rettet og uavhengig av $\phi$, $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$. Vi lar $S$ være overflaten til en sylinder med radius $r$ og lengde $l$. Ladningen per lengdeenhet på innerlederen kaller vi $Q'$. Gauss' lov gir:

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 2\pi r l \epsilon_0 E(r) = Q_{\text{innenfor } S} = \begin{cases} Q'l, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{1}$$

dvs

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 r}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{2}$$

Vi finner $Q'$ ved bruk av definisjonen av potensial:

$$V(a) - V(b) = V_0 - 0 = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}. \tag{3}$$

Altså får vi

$$Q' = \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{4}$$

Innsatt i (2) gir dette

$$\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}} = \begin{cases} \frac{V_0}{r\ln\frac{b}{a}}\hat{\mathbf{r}}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{5}$$

Det går også an å bruke Gauss' lov på differensialform, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, eller Poissons likning $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$ til å finne $\mathbf{E}$. Differensialoperatorene uttrykkes da i sylinderkoordinater, og man må bruke at $\rho = 0$ i det dielektriske mediet mellom lederne.

**b)** Potensial:

$$V(r) = \int_r^b E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} V_0, & \text{for } r < a \\ V_0\frac{\ln\frac{b}{r}}{\ln\frac{b}{a}}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{for } r > b. \end{cases} \tag{6}$$

**c)** Kapasitans per lengdeenhet:

$$C' = \frac{Q'}{V(a) - V(b)} = \frac{Q'}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{7}$$

**d)** Langt fra randen $z = L$ er strømtettheten pga. symmetri rettet radielt utover. Vi kan skrive

$$\mathbf{J} = J(r)\hat{\mathbf{r}}, \tag{8}$$

der $J(r)$ er uavhengig av $\phi$. Den er også uavhengig av $z$ så lenge vi er langt fra randen. Hvis vi kan se bort fra randeffekter, blir da strømmen som går fra innerleder til ytterleder $I = 2\pi r L J(r)$, så

$$J(r) = \frac{I}{2\pi r L}. \tag{9}$$

Dette betyr at feltet er

$$\mathbf{E} = \frac{I}{2\pi\sigma L r}\hat{\mathbf{r}}. \tag{10}$$

Potensialforskjellen er

$$V_0 = \int_a^b \mathbf{E}(r) \cdot \hat{\mathbf{r}} \mathrm{d}r = \frac{I}{2\pi\sigma L} \ln(b/a) \tag{11}$$

Ved å snu på denne får vi

$$I = \frac{2\pi\sigma L}{\ln(b/a)} V_0. \tag{12}$$

Det elektriske feltet blir

$$\mathbf{E} = \frac{V_0}{r \ln(b/a)}\hat{\mathbf{r}}, \tag{13}$$

men det var ikke spurt etter i oppgaven. Merk at feltet blir det samme som i a). Det er kanskje fristende å bruke samme metode som i a) til å finne feltet, og så bruke at $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$. Dette er ikke ok, med mindre man begrunner at den frie ladningstettheten i væsken er null (hvilket ikke er opplagt).

**e)** En mulighet er som følger: Vi kan tenke oss at koaksialkabelen har to deler, en del nær enden der randeffektene er store, og en del (resten) der randeffektene er neglisjerbare. Vi gjør nå to målinger av strømmen, en måling med nedsenkningsdybde $L_1$ og en måling med større nedsenkningsdybde $L_2$. Forskjellen på disse to målingene er at delen med neglisjerbare randeffekter har ulik lengde; den andre delen er like stor. Forskjellen $\Delta I = I_2 - I_1$ svarer til strømmen som går fra innerleder til ytterleder i en lengde $L_2 - L_1$ av koaksialkabelen. I denne lengden av koaksialkabelen kan vi se bort fra randeffektene. Dermed får vi

$$\Delta I = \frac{2\pi\sigma(L_2 - L_1)}{\ln(b/a)} V_0 \tag{14}$$

Fra dette uttrykket kan $\sigma$ bestemmes.

Et annet forslag er å stenge væsken inne ved hjelp av en isolerende propp. Strømtettheten vil da være radielt rettet overalt, slik at randeffektene elimineres.

**Oppgave 2**

**a)** Amperes lov på en rektangulær sløyfe med en side $l'$ parallell med $z$-aksen og inne i solenoiden, gir $Hl' = -N'I$, der $N'$ er antall viklinger på denne delen med lengde $l'$. Dette gir $H = -N'I/l' = -NI/l$ og derfor

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 NI}{l}\hat{\mathbf{z}}, \text{ inne i solenoiden} \tag{15}$$

Fortegnet her er motsatt av hva det pleier å være i denne type oppgave. Dette skjer pga. den definerte strømretningen på figuren: Anta at man velger positiv omløpsretning for integrasjonssløyfa slik at man integrerer i $+z$-retning inne i solenoiden. Om man holder høyre hånd rundt integrasjonssløyfa, vil tommelen peke i motsatt retning av strømmen som går igjennom sløyfa, altså teller denne strømmen negativt på høyresiden av Amperes lov. (Dette var ikke ment å være et vesentlig punkt - begge fortegn ble godtatt.)

**b)** Faradays lov er

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}, \tag{16}$$

der vi velger $C$ til å være en sirkulær sløyfe med radius $r$ i platen, sentrert rundt $z$-aksen. Fra symmetri har vi at $\phi$-komponenten til $\mathbf{E}$ er uavhengig av $\phi$. Altså $\oint_C \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 2\pi r E_\phi$. Med $\mathbf{B} = B_0\cos(2\pi f t)\hat{\mathbf{z}}$ får vi

$$2\pi r E_\phi = \pi r^2 B_0 2\pi f \sin(2\pi f t). \tag{17}$$

Dette betyr at

$$E_\phi = \pi f B_0 r \sin(2\pi f t). \tag{18}$$

**c)** Strømtettheten er $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = \sigma E_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$. Effekttapet per volumenhet er $\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$. Effekttapet blir altså

$$\begin{aligned} P = \int_{\text{plate}} \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}v = \int_{\text{plate}} \sigma E^2 \mathrm{d}v = d\int_0^a \sigma\pi^2 f^2 B_0^2 r^2 \sin^2(2\pi f t) 2\pi r \mathrm{d}r \\ = \frac{1}{2}\pi^3 d a^4 \sigma f^2 B_0^2 \sin^2(2\pi f t). \end{aligned} \tag{19}$$

Tidsmiddelverdien av dette er

$$P = \frac{1}{4}\pi^3 d a^4 \sigma f^2 B_0^2. \tag{20}$$

**d)** Ja, hysteresetap. Det at det magnetiske feltet varierer harmonisk, kan vises å gi et tap per volumenhet og per periode lik $\int_{\text{periode}} H \mathrm{d}B$, altså lik arealet inne i hysteresekurven $B(H)$.

## Oppgave 3

**a)** Pga. symmetri har vi at $\mathbf{H} = H(r)\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Amperes lov på en sirkulær sløyfe $C$ med radius $r$ og sentrum i lederens akse gir da at

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = H2\pi r = I, \tag{21}$$

utenfor lederen. Dette betyr at

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{22}$$

**b)** Fluksen i sløyfa (med valgt positiv retning ut av papiret) er

$$\Phi = \int_{\text{sløyfe-areal}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -a \int_{a-vt}^{2a-vt} B\mathrm{d}r = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{2a-vt}{a-vt}. \tag{23}$$

Emf'en er dermed

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{a-vt}{2a-vt} \frac{-va + v^2 t + v2a - v^2 t}{(a-vt)^2} = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi(a-vt)(2a-vt)}, \tag{24}$$

med valgt positiv omløpsretning mot klokka (i samsvar med positiv retning for fluksen ut av papiret).

**c)** Fra definisjonen av kapasitans har vi at $Q = CV$. Dette gir at

$$Q(t) = Ce = C\frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi(a-vt)(2a-vt)}. \tag{25}$$

Uttrykket ovenfor er positivt og økende. Uttrykket representerer ladningen på høyre kondensatorplate: I henhold til Lenz' lov vil det gå en strøm mot klokka. Dermed vil ladningen på høyre kondensatorplate øke.

## Oppgave 4

| Spørsmål | Alt. i) | Alt. ii) | Alt. iii) | Alt. iv) |
|---|---|---|---|---|
| a) | | | | x |
| b) | | | x | |
| c) | | | x | |
| d) | | x | | |
| e) | | x | | |