Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme 15. aug. 2013

Oppgave 1

a) Vi starter med å bestemme det elektriske feltet inne i kondensatoren. Vi plasserer en fri ladning Q på innerlederen og en ladning $-Q$ på ytterlederen og bruker Gauss' lov $\oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{inne i } S}$. Gaussflaten som vi velger oss er et kuleskall med radius r. Grunnet symmetri har vi $\mathbf{D} = D(r)\hat{\mathbf{r}}$. Gauss' lov gir da

$$\oint \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi r^2 D(r) = Q. \tag{1}$$

Bruk av $D(r) = \epsilon E(r)$ gir

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}. \tag{2}$$

Vi velger ytterlederen som referansepunkt for potensialet slik at

$$V(a) - V(b) = V_0 = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \tag{3}$$

Kapasitansen til kondensatoren er gitt av $C = \frac{Q}{V_0}$:

$$C = \frac{4\pi\epsilon ab}{b-a}. \tag{4}$$

b) Vi ser at når $b - a = d \ll a$ kan vi skrive

$$C \simeq \epsilon\frac{A}{d}, \tag{5}$$

der $A = 4\pi ab$ er overflaten til kondensatoren og d er avstanden mellom platene. Dette uttrykket er likt det for en parallellplatekondensator.

Oppgave 2

a) Pga. symmetri har vi at $\mathbf{B} = B(r)\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Amperes lov på en sirkulær sløyfe med radius r og sentrum i lederens akse gir da at

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = B2\pi r = \begin{cases} \mu_0 I\frac{\pi r^2}{\pi a^2}, & r < a, \\ \mu_0 I, & r \geq a. \end{cases} \tag{6}$$

Dette betyr at

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\hat{\boldsymbol{\phi}}, & r < a, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\phi}}, & r \geq a. \end{cases} \tag{7}$$

b) Strømtettheten er $J = I/(\pi a^2)$, med retning langs z-aksen. Videre har vi at $\mathbf{J} = N(-e)\mathbf{v}$, der e er elementærladningen og $\mathbf{v}$ er driftshastigheten. Dette gir at

$$\mathbf{v} = -\frac{J}{Ne}\hat{\mathbf{z}} = -\frac{I}{\pi a^2 Ne}\hat{\mathbf{z}} \approx (-\hat{\mathbf{z}})0.24\text{mm/s}. \tag{8}$$

Hastigheten er altså 0.24mm/s i negativ z-retning (dvs. mot venstre på figuren).

c) Den magnetiske kraften er

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{9}$$

Dette gir

$$\mathbf{F} = -evB\hat{\mathbf{r}} = -e\frac{I}{\pi a^2 Ne}\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 a^4 N}\hat{\mathbf{r}}. \tag{10}$$

Retningen er altså radielt innover.

d) Den magnetiske kraften fører til at strømmen av elektroner blir avbøyd mot sentrum av lederen. Dermed blir det overskudd av negativ ladning ved lederens akse, og positiv ladning på utsiden. Dette gir et elektrisk felt som går i $-\hat{\mathbf{r}}$-retning, som dermed gir en kraft på elektronene i $+\hat{\mathbf{r}}$-retning.

e) Potensialforskjellen mellom sentrum av lederen og overflaten er

$$V = \int_0^a E\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 e a^2 N} \approx -2.4 \cdot 10^{-10}\text{V}. \tag{11}$$

f) Strømmen I kan økes, og radius a kan minkes. Det som imidlertid kan gi en betydelig større spenning, er hvis vi bruker et materiale med mye mindre tetthet av frie elektroner, f.eks. en udopet halvleder. En annen mulighet er å benytte et meget sterkt, eksternt magnetisk felt. Fenomenet som utnyttes i slike målinger kalles Hall-effekt.

Oppgave 3

a) Vi legger inn en x-akse normalt på de to rette lederne, fra den ene til den andre. La origo være ved den venstre lederen (tegn opp!). Amperes lov gir at den magnetiske flukstettheten fra den venstre lederen er

$$B_{\text{venstre}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}, \text{ for } 0 < x < 2a, \tag{12}$$

med retning ut av papiret. Fra den andre har vi

$$B_{\text{høyre}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(2a - x)}, \text{ for } 0 < x < 2a, \tag{13}$$

i samme retning. Den magnetiske flukstettheten fra de to rette lederne er altså

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2a - x}\right), \text{ for } 0 < x < 2a, \tag{14}$$

fortsatt i samme retning.

b) Vi kaller kretsen bestående av de to uendelig lange lederne for sløyfe 1, og den sirkulære sløyfa for sløyfe 2. For å regne ut den gjensidige induktansen, antar vi en strøm I i sløyfe 1 og regner ut hvilken fluks Φ_{12} den gir i sløyfe 2. Ut fra feltet i forrige deloppgave får vi

$$\Phi_{12} = \int_{\text{ring}} B \mathrm{d}S = 4 \int_a^{2a} B(x) \sqrt{a^2 - (x-a)^2} \mathrm{d}x. \tag{15}$$

Her er tallet 4 et resultat av at vi regner ut fluksen i en kvadrant av sirkelen og ganger med 4 (symmetri). Rota fås ved å innse at en sirkel med sentrum i $(a, 0)$ beskrives av uttrykket $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.

Vi bruker nå substitusjonen $u = x - a$ i (15):

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \frac{2\mu_0 I}{\pi} \int_0^a \left(\frac{1}{a+u} + \frac{1}{a-u} \right) \sqrt{a^2 - u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{4\mu_0 I a}{\pi} \int_0^a \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} \\ &= \frac{4\mu_0 I a}{\pi} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1 - v^2}} = -\frac{4\mu_0 I a}{\pi} \int_{\pi/2}^0 \mathrm{d}\theta = 2\mu_0 I a. \end{aligned} \tag{16}$$

I den siste linja har vi brukt substitusjonene $v = u/a$ og $v = \cos\theta$. (Man kan evt. bruke en formelsamling.) Dette gir den gjensidige induktansen

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I} = 2\mu_0 a \tag{17}$$

Oppgave 4

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				x
b)			x	
c)		x		
d)	x			
e)	x			