Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme 5. juni 2012

Oppgave 1

a) Ringen har linjeladningstetthet $Q' = Q/(2\pi r)$. Vi ser på et observasjonspunkt på z-aksen, med koordinat z. Dette punktet er like langt fra alle linjeelementer $\mathrm{d}l$ på ringen. Vi kaller denne avstanden R. Vi får da

$$V(z) = \int_{\text{ring}} \frac{Q'\mathrm{d}l}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R}\int_{\text{ring}} \mathrm{d}l = \frac{Q' 2\pi r}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}. \tag{1}$$

b) Vi ser på disken som en mengde ringer, med radius fra 0 til a. En slik ring med radius r og tykkelse $\mathrm{d}r$ har ladningen $\mathrm{d}Q = \rho_\mathrm{s} 2\pi r \mathrm{d}r$. Vi får fra (1)

$$V(z) = \int_{\text{disk}} \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+r^2}} = \int_0^a \frac{\rho_\mathrm{s} 2\pi r \mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{z^2+a^2} - z\right), \tag{2}$$

der det siste integralet regnes ut ved substitusjon: $u = \sqrt{z^2+r^2}$.

c)

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}} \quad \text{for } z > 0. \tag{3}$$

d) I grensen $z \ll a$ får vi $\mathbf{E} = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$ for $z > 0$. Feltet blir som for et uendelig plan – en disk ser uendelig stor ut når man står nær den. I grensen $z \gg a$ bruker vi at $(1 + \frac{a^2}{z^2})^{-1/2} \approx (1 - \frac{a^2}{2z^2})$ og får at

$$\mathbf{E} \approx \frac{\rho_\mathrm{s} a^2}{4\epsilon_0 z^2} = \frac{\rho_\mathrm{s}\pi a^2}{4\pi\epsilon_0 z^2}. \tag{4}$$

Dette er altså det samme feltet som vi ville fått om all ladningen var samlet i et punkt i origo. Dette virker rimelig, siden en disk ser ut som et punkt når man står langt borte.

e) Superposisjon gir:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} - 1 + \frac{z+d}{\sqrt{(z+d)^2+a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(\frac{z+d}{\sqrt{(z+d)^2+a^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}} \quad \text{for } z > 0\end{aligned} \tag{5}$$

f) Siden sylinderen har uniform polarisering, er det ingen bunden romladningstetthet, kun bunden overflateladningstetthet. Polariseringen er rettet mot den øvre enden av sylinderen (den som befinner seg i $z = 0$), så det er en positiv bunden flateladningstetthet der, mens det er en en negativ bunden flateladningstetthet i $z = -d$. Det elektriske feltet fra en samling ladninger er det samme, enten det er bundne eller frie (eller norske eller svenske) ladninger. Dermed blir det elektriske feltet gitt av uttrykket i e).

Om man er i stand til å utlede formelen for sammenhengen mellom $\mathbf{P}$ og bunden overflateladning $\rho_{\mathrm{s,P}}$, kan man finne et uttrykk for feltet (dette er det ikke spurt etter). Denne sammenhengen er: $\rho_{\mathrm{s,P}} = P_{2\mathrm{n}} - P_{1\mathrm{n}}$, jfr. helt tilsvarende sammenheng for fri flateladningstetthet og normalkomponentene av $\mathbf{D}$-feltet (står i formelsamlingen). For den bundne overflateladningen i $z = 0$ fås dermed $\rho_{\mathrm{s,P}} = P$, mens for $z = -d$ fås motsatt fortegn. Feltet blir da som i e) med substitusjonen $\rho_{\mathrm{s}} \to \rho_{\mathrm{s,P}}$.

Oppgave 2

a) Bonden utnyttet at en strøm i kraftlinjen gir opphav til et magnetfelt, ifølge Amperes lov. Når dette feltet er varierende, og går igjennom en spole, får vi en varierende fluks. Via Faradays lov gir dette en indusert emf.

b) Siden strømmen er sylindersymmetrisk fordelt, vil feltet måtte være rettet i $\hat{\boldsymbol{\phi}}$-retning:

$$\mathbf{H} = H(r)\hat{\boldsymbol{\phi}}, \tag{6}$$

der $H(r)$ er uavhengig av ϕ (pga. symmetri) og z (fordi lederen er uendelig lang). Vi bruker så Amperes lov på en sirkulær kurve C med radius r større enn radiusen til lederen:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_C H \mathrm{d}l = H 2\pi r = I. \tag{7}$$

Dette gir

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\phi}}, \text{ utenfor lederen.} \tag{8}$$

c) Med den angitte orienteringen, vil spolens flatenormal være i samme retning som $\mathbf{B}$-feltet. Dette gjør at fluksen $N \int_{\text{spoleareal}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ blir størst mulig.

d) Først finner vi den totale fluksen gjennom spolen:

$$\begin{aligned}\Phi_{12} = N \int_{\text{spoleareal}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Na \int_{h-a}^{h} B \mathrm{d}r = \frac{Na\mu_0 I}{2\pi} \int_{h-a}^{h} \frac{1}{r} \mathrm{d}r \\ = \frac{Na\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{h}{h-a}.\end{aligned} \tag{9}$$

Dette gir følgende gjensidig induktans:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I} = \frac{Na\mu_0}{2\pi} \ln \frac{h}{h-a}. \tag{10}$$

(Dersom man antar at $a \ll h$, noe som ikke er gjort i oppgaven, så kan man tilnærme

$$\ln \frac{h}{h-a} = \ln \frac{1}{1-a/h} \approx \ln(1+a/h) \approx a/h, \tag{11}$$

som gir

$$L_{12} \approx \frac{Na^2\mu_0}{2\pi h}. \tag{12}$$

Dette ville vi fått direkte hvis vi antok at B var uniform inne i spolen, og dermed $\Phi_{12} = NBa^2$.)

Når vi skal beregne den indusert emf'en, skriver vi strømmen på formen

$$I(t) = I_0 \sin(2\pi ft + \varphi), \tag{13}$$

som er det generelle uttrykket for en harmonisk variasjon. Dette gir

$$e_{12} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t} = -L_{12}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{Na\mu_0}{2\pi} \ln \frac{h}{h-a} 2\pi f I_0 \cos(2\pi ft + \varphi), \tag{14}$$

så emf'ens amplitude er

$$\mathrm{emf}_0 = Na\mu_0 f I_0 \ln \frac{h}{h-a}. \tag{15}$$

Ved å sette inn tallverdier finner vi at spolen må ha ca. $N = 1494 \approx 1500$ viklinger.

e) Resistansen til en lengde l av kabelen er gitt av

$$R = \frac{V}{I} = \frac{El}{JS} = \frac{El}{\sigma ES} = \frac{l}{\sigma S}, \tag{16}$$

der V er potensialforskjellen over lengden l, J er strømtettheten og S er tverrsnittsarealet. Ved å sette inn tallverdier, samt å bruke at $l = N4a = 30000\mathrm{m}$, får vi at

$$S = 9.5 \cdot 10^{-7}\mathrm{m}^2 = 0.95\mathrm{mm}^2. \tag{17}$$

Spolen koster $3 \cdot 30000 = 90000$ kr, og gir kun 0.05 kWh i løpet av en time, dvs. $0.05 \cdot 24 \cdot 365 = 438$ kWh i året. Dermed trengs det 205 år før det begynner å svare seg.

f) Strømretningen til returstrømmen er motsatt rettet (det blir riktignok litt mer komplisert å beregne dette for det aktuelle tilfellet med tre faser). Dermed vil det totale magnetfeltet bli mindre. Selvinduktansen til spolen er meget stor, siden arealet er så stort og det er så mange viklinger. Selvinduktansen vil begrense strømmen betydelig i henhold til Lenz' lov: Det vil indukseres en mot-strøm som delvis kompenserer den påtrykte feltsendringen. Dermed vil den totale fluksendringen i spolen, og dermed total emf bli mye mindre.

Oppgave 3

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)		x		
b)			x	
c)				x
d)			x	
e)	x			