Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme 13. august 2012

Oppgave 1

a) La r være avstanden fra z-aksen i et sylindrisk koordinatsystem. Superposisjon av bidrag fra hvert flateladningselement gir

$$V(z) = \int_{\text{disk}} \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+r^2}} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho_\mathrm{s} r \mathrm{d}\phi \mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+r^2}} = \int_0^a \frac{\rho_\mathrm{s} 2\pi r \mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}. \tag{1}$$

Ved hjelp av substitusjonen $u = \sqrt{z^2+r^2}$ kan siste integralet regnes ut, og vi får

$$V(z) = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{z^2+a^2} - z\right). \tag{2}$$

b)

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}} \quad \text{for } z > 0. \tag{3}$$

c) I grensen $z \ll a$ får vi $\mathbf{E} = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$ for $z > 0$. Feltet blir som for et uendelig plan – en disk ser uendelig stor ut når man står nær den. I grensen $z \gg a$ bruker vi at $(1 + \frac{a^2}{z^2})^{-1/2} \approx (1 - \frac{a^2}{2z^2})$ og får at

$$\mathbf{E} \approx \frac{\rho_\mathrm{s} a^2}{4\epsilon_0 z^2} = \frac{\rho_\mathrm{s}\pi a^2}{4\pi\epsilon_0 z^2}. \tag{4}$$

Dette er altså det samme feltet som vi ville fått om all ladningen var samlet i et punkt i origo. Dette virker rimelig, siden en disk ser ut som et punkt når man står langt borte.

d) Vi må utføre arbeidet $qV(z_0)$, der $V(z)$ er gitt i b), for å føre ladningen fra uendeligheten til z_0. (Husk definisjonen av potensial.) Siden potensialet er det samme i $z = -\infty$ og $z = +\infty$ utfører vi ikke arbeid om vi flytter ladningen fra $z = -\infty$ til $z = +\infty$.

Tolkning: Vi utfører et positivt arbeid når vi flytter ladningen fra $z = -\infty$ til $z = 0$, og et negativt arbeid videre til $z = \infty$. Dette stemmer med hva vi vet om det elektriske feltet: Ladningen frastøtes av planet (dersom q og ρ_s har like fortegn), så vi må presse ladningen fra $-\infty$ til 0, men vi får tilbake energien når vi fører den videre til $+\infty$.

e) Superposisjon gir:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} - 1 + \frac{z+d}{\sqrt{(z+d)^2+a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}}$$
$$= \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(\frac{z+d}{\sqrt{(z+d)^2+a^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}} \quad \text{for } z > 0 \tag{5}$$

Hvis $d \ll a$ og $d \ll z$, kan vi som en groveste tilnærming regne til nullte orden i d/a og d/z; dette vil si det samme som å tilnærme $d/a \approx 0$ og $d/z \approx 0$. Dette gir $\mathbf{E} = 0$, hvilket selvfølgelig er rett i grensen $d \to 0$. Like fullt er det et trivielt og uinteressant resultat, så vi må gjøre en bedre tilnærmelse. Da regner vi i stedet til første orden i d/a og d/z. Dette betyr at vi må beholde ledd av typen d, men neglisjerer ledd av typen d^2, d^3, osv. Vi deler med $\sqrt{z^2+a^2}$ oppe og nede i den første brøken:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(\frac{\frac{z+d}{\sqrt{z^2+a^2}}}{\sqrt{\frac{z^2+2zd+d^2+a^2}{z^2+a^2}}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}}$$
$$\approx \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(\frac{\frac{z+d}{\sqrt{z^2+a^2}}}{\sqrt{1+\frac{2zd}{z^2+a^2}}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}}$$
$$\approx \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(\frac{z+d}{\sqrt{z^2+a^2}}\left(1 - \frac{zd}{z^2+a^2}\right) - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}} \tag{6}$$

I den siste overgangen brukte vi at $(1+u)^a \approx 1 + au$ for $u \ll 1$. Ved å gange ut og neglisjere leddet som er proporsjonalt med d^2, fås

$$\mathbf{E} \approx \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(\frac{d}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{z^2 d}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\hat{\mathbf{z}} = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\frac{a^2 d}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{z}}. \tag{7}$$

f) Siden sylinderen har uniform polarisering, er det ingen bunden romladningstetthet, kun bunden overflateladningstetthet. Polariseringen er rettet mot den øvre enden av sylinderen (den som befinner seg i $z = 0$), så det er en positiv bunden flateladningstetthet der, mens det er en en negativ bunden flateladningstetthet i $z = -d$. Det elektriske feltet fra en samling ladninger er det samme, enten det er bundne eller frie (eller norske eller svenske) ladninger. Dermed blir det elektriske feltet gitt av uttrykket i e).

Om man er i stand til å utlede formelen for sammenhengen mellom $\mathbf{P}$ og bunden overflateladning $\rho_{\mathrm{s,P}}$, kan man finne et uttrykk for feltet (dette er det ikke spurt etter). Denne sammenhengen er: $\rho_{\mathrm{s,P}} = P_{2\mathrm{n}} - P_{1\mathrm{n}}$, jfr. helt tilsvarende sammenheng for fri flateladningstetthet og normalkomponentene av $\mathbf{D}$-feltet (står i formelsamlingen). For den bundne overflateladningen i $z = 0$ fås dermed $\rho_{\mathrm{s,P}} = P$, mens for $z = -d$ fås motsatt fortegn. Feltet blir da som i e) med substitusjonen $\rho_\mathrm{s} \to \rho_{\mathrm{s,P}}$.

g) Sylinderen er flat ($d \ll a$) så vi kan se på den som en sirkulær disk med en liten tykkelse d. Når magnetiseringen er uniform, vil de magnetiske dipoene (dvs. de mikroskopiske Ampere-strømmene) kunne effektivt sett adderes opp til en strømsløyfe på den sirkulære utsiden (tegn figur!). Dette er pga. kansellering av felt fra nabo-strømsløyfer i det indre området.

h) Problemet blir nå å finne $\mathbf{B}$ på aksen til en sirkulær strømløyfe med radius a. Dette problemet er løst i kompendiet (kap. 3.1). Svaret er

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{z}}. \tag{8}$$

i) Ja, siden det ikke er noen frie ladninger ($\rho = 0$) eller frie strømmer ($\mathbf{J} = 0$), får vi en direkte sammenheng mellom problemene. For tilfellet med polarisering, har vi følgende ligninger som gjelder overalt:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{9a}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{9b}$$
$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{9c}$$

og for tilfellet med magnetisering:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{10a}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \tag{10b}$$
$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{10c}$$

Matematisk sett er det altså full symmetri:

$$\mathbf{D} \to \mathbf{B} \tag{11a}$$
$$\mathbf{E} \to \mathbf{H} \tag{11b}$$
$$\mathbf{P} \to \mu_0 \mathbf{M} \tag{11c}$$
$$\epsilon_0 \to \mu_0 \tag{11d}$$

Ved å utnytte denne symmetrien, får vi at uttrykket fra e) også må gjelde for $\mathbf{B}$ i h):

$$\mathbf{B} \approx \frac{\text{konst}}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{z}}. \tag{12}$$

(Husk likevel at det er $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ som er de fysiske feltene, så slik sett er det en symmetri mellom $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$, og ikke $\mathbf{E}$ og $\mathbf{H}$.)

Oppgave 2

a) Symmetri gir at $\mathbf{H} = H(r)\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Bruker så Amperes lov på en sirkulær integrasjonssløyfe med radius a. Dette gir

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = H 2\pi a = NI. \tag{13}$$

Dette gir at

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \frac{\mu N I}{2\pi a}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{14}$$

inne i toroiden.

b)

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{N\Phi_{\text{tverrsn}}}{I} = \frac{NBS}{I} = \frac{\mu N^2 S}{2\pi a}. \tag{15}$$

Her ble det brukt at tverrsnittsfluksen kan tilnærmes som BS, siden $\mathbf{B}$ varierer lite over (det tynne) tverrsnittet.

c) Vi ser at uttrykket har dimensjon gitt av dimensjonen til μ ganger meter. Siden μ_0 og derfor μ, har dimensjon H/m (se formelsamlingen), får vi at uttrykket vårt har dimensjon H.

Det fins mange andre måter å argumentere på. F.eks.: $\frac{1}{2}LI^2$ skal ha dimensjon J. Ved å sette inn uttrykket vårt for L får vi at $\mu SI^2/a$ skal ha dimensjon J. F.eks. fra uttrykket for $\mathbf{H}$ rundt en uendelig lang rett leder, har vi at dimensjonen til $\mathbf{H}$ er den samme som for I/a. Dermed skal μSaH^2 ha dimensjon J. Dette stemmer siden $\frac{1}{2}\mu H^2$ er energitetthet.

d) Siden det er bare en vikling, får vi at den induserte emf'en blir

$$e_2 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{tverrsn}}}{\mathrm{d}t} = -S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -S\frac{\mu N}{2\pi a}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu SN}{2\pi a}\omega I_0 \cos(\omega t). \tag{16}$$

Oppgave 3

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				x
b)	x			
c)		x		
d)	x			
e)	x			