Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme 24. mai 2011

Oppgave 1

a) Av symmetrigrunner må det elektriske feltet være radielt rettet og uavhengig av ϕ, $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. Vi lar S være overflaten til en sylinder med radius r og lengde l. Ladningen per lengdeenhet på innerlederen kaller vi Q'. Gauss' lov gir:

$$\oint_S \epsilon\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi r l \epsilon E(r) = Q_{\text{innenfor } S} = \begin{cases} Q'l, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{1}$$

dvs

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi\epsilon r}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{2}$$

Vi finner Q' ved bruk av definisjonen av potensial:

$$V(a) - V(b) = V_0 - 0 = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q'}{2\pi\epsilon}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon}\ln\frac{b}{a}. \tag{3}$$

Altså får vi

$$Q' = \frac{2\pi\epsilon V_0}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{4}$$

Innsatt i (2) gir dette

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r = \begin{cases} \frac{V_0}{r\ln\frac{b}{a}}\vec{u}_r, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{5}$$

Det går også an å bruke Gauss' lov på differensialform, $\nabla\cdot\vec{D} = \rho$, eller Poissons likning $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$ til å finne $\vec{E}$. Differensialoperatorene uttrykkes da i sylinderkoordinater, og man må bruke at $\rho = 0$ i det dielektriske mediet mellom lederne.

b) Potensial:

$$V(r) = \int_r^b E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} V_0, & \text{for } r < a \\ V_0 \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{for } r > b. \end{cases} \tag{6}$$

c) Kapasitans per lengdeenhet:

$$C' = \frac{Q'}{V(a) - V(b)} = \frac{Q'}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}. \tag{7}$$

d) Vi har fortsatt full sylindersymmetri, så $\vec{D} = D(r)\vec{u}_r$ og $D(r)$ er uavhengig av z og ϕ. Gauss' lov gir nå:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi r l D(r) = Q_{\text{innenfor } S} = \begin{cases} Q'l, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{8}$$

dvs

$$D(r) = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi r}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{9}$$

Nå må vi huske på at mediet ikke lenger er lineært, så vi kan ikke bruke $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$. I stedet bruker vi definisjonen av $\vec{D}$-feltet, som alltid er gyldig:

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \tag{10}$$

dvs.

$$E(r) = \frac{D(r) - P}{\epsilon_0} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 r} - \frac{P}{\epsilon_0}. \tag{11}$$

Vi finner Q' ved å bruke definisjonen av potensial:

$$V_0 - 0 = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} - \frac{1}{\epsilon_0}\int_a^b P\mathrm{d}r = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a} - \frac{P(b-a)}{\epsilon_0}. \tag{12}$$

Altså får vi

$$\frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} = \frac{V_0 + P(b-a)/\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}, \tag{13}$$

og dermed

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r = \begin{cases} \left(\frac{V_0 + P(b-a)/\epsilon_0}{r \ln \frac{b}{a}} - \frac{P}{\epsilon_0}\right)\vec{u}_r, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{14}$$

Oppgave 2

a) Selvinduktans:

$$L = \frac{\Phi}{I}, \tag{15}$$

der Φ er fluksen i sløyfa som forårsakes av strømmen I i den samme sløyfa. For en spole er Φ summen av fluksen over alle viklingene, dvs. fluksen i vikling 1 + fluksen i vikling 2 + osv.

b) Når man skal finne selvinduktansen, antar man en strøm I i spolen, og regner ut fluksen den forårsaker i den samme spolen. Resultatet er uavhengig av retningen vi velger oss for strømmen.

Pga. symmetri vil $\vec{H}$ være rettet langs aksen av solenoiden. Vi lager oss en rektangulær integrasjonssløyfe der den ene sidekanten med lengde l er inne i solenoiden, og parallell med solenoidens akse. Vi lar omløpsretningen være slik at man integrerer langs retningen til $\vec{H}$ inne i solenoiden. Da gir Amperes lov: $\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = Hl = NI$, så

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}, \tag{16}$$

med retning langs aksen til solenoiden. Dermed får vi selvinduktansen

$$L = \frac{NB\pi a^2}{I} = \frac{\pi \mu_0 a^2 N^2}{l}. \tag{17}$$

c) Vi kobler spolen til en (veksel-)spenningskilde med spenning V. Da blir summen av kilder i kretsen $V + e$, der e er den elektromotoriske spenningen indusert i spolen. Hvis vi hadde hatt en resistans i kretsen ville vi hatt $V + e = Ri$. Siden R her er null får vi i stedet

$$V = -e = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{18}$$

I en støvsuger er det en motor, som bl.a. er oppbygd med en spole. Dvs. støvsugeren har en betydelig selvinduktans. Når vi trekker ut kontakten, må nødvendigvis strømmen reduseres ekstremt fort. Ifølge Faradays lov induseres det da en stor elektromotorisk spenning e. Er denne stor nok, vil feltet i lufta mellom støpselet og kontakten bli så stort at lufta ioniseres - det dannes en gnist.

d) Siden strømmen er jevnt fordelt, er strømtettheten $\vec{J}$ konstant over tverrsnittet. På kanten av lederen må $\vec{J}$ være rettet parallelt med grenseflaten; altså er $\vec{J}$ parallell med lederens akse overalt. Siden strømmen er den samme gjennom alle tverrsnitt av lederen (normalt på aksen), så er $\vec{J}$ lik overalt i lederen. Fra Ohms lov $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ får vi da at $\vec{E}$ må være en konstant. Dermed blir spenningen over lederen $V = \int_{\text{venstre ende}}^{\text{høyre ende}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = El_{\text{l}}$. Dette gir

$$R = \frac{V}{I} = \frac{El_{\text{l}}}{JS} = \frac{El_{\text{l}}}{\sigma ES} = \frac{l_{\text{l}}}{\sigma S}. \tag{19}$$

e) Vi har fortsatt $V = El_{\text{l}}$ siden feltet $\vec{E}$ er det samme overalt i lederen. Dette gir

$$L = \frac{V}{\mathrm{d}i/\mathrm{d}t} = \frac{El_{\text{l}}}{S\mathrm{d}J/\mathrm{d}t}. \tag{20}$$

Ved å sette inn definisjonen av strømtetthet $\vec{J} = N_e(-e)\vec{v}$, der $\vec{v}$ er hastigheten til elektronene, får vi

$$L = -\frac{El_{\text{l}}}{SN_e e\mathrm{d}v/\mathrm{d}t}. \tag{21}$$

Til slutt bruker vi Newtons andre lov $-eE = m_e\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$:

$$L = \frac{m_e l_{\text{l}}}{N_e e^2 S}. \tag{22}$$

f) Hvis vi endrer alle dimensjoner med faktoren k, dvs. $l_{\text{l}} \to kl_{\text{l}}$, $S \to k^2 S$ og $a \to ka$, får vi at $L_{\text{s}} \to kL_{\text{s}}$ mens $L_{\text{e}} \to L_{\text{e}}/k$. Dvs. ved store dimensjoner (stor k) dominerer L_{s}, mens ved små dimensjoner (liten k) dominerer L_{e}.

g) Tregheten til en induktans i serie med en resistans er ifølge oppgaveteksten gitt ved tidskonstanten τ. En mulig tolkning er som følger: Anta at spenningen over de to endene av ledningen er null for $-\infty < t < 0$, mens den for $t \geq 0$ holdes lik V. Strømmen for $t < 0$ er altså null, mens etter $t = 0$ begynner den å vokse. Etter en tid i størrelsesorden τ har strømmen slått seg til ro og blitt V/R.

Om man endrer spenningen periodisk, betyr dette at strømmen ikke greier å henge med for frekvenser større enn $1/\tau$. Sagt på en annen måte, omtrent ved frekvensen $f = 1/\tau = R/L$ greier ikke elektronene i ledningen å henge med lenger; de blir for trege pga. sin masse. Denne frekvensen er

$$f = \frac{R}{L} = \frac{e^2 N_e}{\sigma m_e} = 4.1 \cdot 10^{13}\ \text{Hz}. \tag{23}$$

Dette svarer til en bølgelengde $\lambda = c/f = 6\ \mu\text{m}$, som ligger i den infrarøde delen av det elektromagnetiske spekteret.

Kommentar til f) og g): For et gitt materiale må S og/eller N_e være liten (og få viklinger) for at L_{e} i det hele tatt skal være i stand til å dominere for realiserbare dimensjoner. Et eksempel på en situasjon hvor L_{e} dominerer og er en begrensende faktor, er for metamaterialer fra infrarøde frekvenser og oppover. Her kan en enhetscelle bestå bl.a. av en enkelt vikling i serie med en liten kapasitans.

L_e kalles kinetisk induktans.

Oppgave 3

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)			x	
b)			x	
c)			x	
d)				x
e)				x
f)		x		