Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme kontinuasjonseksamen 11. aug. 2011

Oppgave 1

a) Med kulesymmetrisk ladningsfordeling må $\vec{E}$ og $\vec{D}$ være radielt rettet overalt, og kun avhengig av avstanden r fra kuleskallets sentrum, så $\vec{D} = D(r)\vec{u}_r$. Med et dielektrikum til stede bestemmes først $D(r)$ i området $a < r < b$ ved hjelp av Gauss' lov. Anta en symmetrisk fordelt ladning Q på innerlederen. Bruk et kuleskall med radius r som Gaussflate; total fri ladning innenfor dette kuleskallet er da Q:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S D \mathrm{d}S = D \oint_S \mathrm{d}S = D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q. \tag{1}$$

Det elektriske feltet i sjiktet mellom lederne er dermed

$$E(r) = \frac{D(r)}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}. \tag{2}$$

Potensialforskjellen mellom lederne blir

$$V = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{Q(b-a)}{4\pi\epsilon ab}. \tag{3}$$

Kapasitansen blir derfor

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon ab}{(b-a)}. \tag{4}$$

b) Dersom det dielektriske sjiktet er veldig tynt, har vi $a \simeq b$, og tilnærmet samme areal $A \simeq 4\pi ab \simeq 4\pi a^2 \simeq 4\pi b^2$ på de to lederne. Dermed, med $d = b - a =$ avstanden mellom lederne, får vi

$$C \simeq \epsilon\frac{A}{d}, \tag{5}$$

dvs. som for en parallellplatekondensator.

c) Det elektriske feltet er ifølge a)

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r = \frac{CV}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r, \tag{6}$$

for $a < r < b$. For $r < a$ og $r > b$ er $\vec{E} = 0$.

d) Energitetthet: $w_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2$.
Energi:

$$W_e = \int_{\text{mellom lederne}} \frac{1}{2}\epsilon E^2 \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\epsilon \int_a^b E^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{4\pi\epsilon}C^2V^2 = \frac{1}{2}CV^2. \tag{7}$$

e) Siden det fortsatt er ingen frie ladninger i området $a < r < b$ er $\vec{D}$ som før. Resultatet fås direkte ved å følge samme framgangsmåte som i a).

$$\frac{1}{C} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{\epsilon(r)4\pi r^2} = \int_a^b \frac{r\mathrm{d}r}{4\pi K} = \frac{b^2-a^2}{8\pi K}, \tag{8}$$

så

$$C = \frac{8\pi K}{b^2-a^2}. \tag{9}$$

f) Vi antar nå en konstant strøm I fra den indre til den ytre lederen. Pga. symmetri fås da $\vec{J} = I/(4\pi r^2)\vec{u}_r$, og dermed $\vec{E} = I/(4\pi\sigma r^2)\vec{u}_r$. Vha. $V = \int_a^b E\mathrm{d}r$ blir

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right). \tag{10}$$

Legg merke til at ϵ ikke har noen betydning.

Oppgave 2

a) Da $\mu_r \gg 1$, kan vi anta at fluksen følger toroiden. Siden toroiden er tynn antar vi at $\vec{B}$-feltet er tilnærmet uniformt over tverrsnittet slik at fluksen blir $\Phi = \pi b^2 B$.

Vi bruker Amperes lov på en lukket integrasjonskurve C langs feltlinjene (rundt den magnetiske kretsen):

$$N_1I_1 + N_2I_2 = \oint_C \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = H2\pi a, \tag{11}$$

dvs.

$$\vec{H} = \frac{N_1I_1 + N_2I_2}{2\pi a}\vec{u}_\phi \tag{12}$$

og $\vec{B} = \mu\vec{H}$ i toroidekjernen.

b) Fluksen gjennom et tverrsnitt av toroiden kan uttrykkes $\Phi = \pi b^2 \mu H$. Selvinduktansen er definert som $L_{11} = \Phi_{11}/I_1$. Fluksen Φ_{11} er total fluks i spole 1 (dvs. summen av fluks i alle N_1 viklinger) pga. strømmen I_1. Dette gir

$$L_{11} = N_1 \pi b^2 \mu \frac{N_1}{2\pi a} = \frac{\mu b^2 N_1^2}{2a}. \tag{13}$$

Tilsvarende får vi den gjensidige induktansen

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu b^2 N_1 N_2}{2a}. \tag{14}$$

c) Energitetthet:

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2}\mu H^2. \tag{15}$$

Energi:

$$\begin{aligned} W_m &= \int_{\text{toroide}} \frac{1}{2}\mu H^2 \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\mu H^2 2\pi a \pi b^2 = \frac{1}{2}\mu \frac{(N_1 I_1 + N_2 I_2)^2}{2\pi a}\pi b^2 \\ &= \frac{\mu b^2}{4a}(N_1^2 I_1^2 + 2N_1 N_2 I_1 I_2 + N_2^2 I_2^2). \end{aligned} \tag{16}$$

Ved å sammenlikne med induktansene i forrige punkt (og induktansen L_{22} som må være $L_{22} = \frac{\mu b^2 N_2^2}{2a}$), ser vi direkte

$$W_m = \frac{1}{2}(L_{11} I_1^2 + 2L_{12} I_1 I_2 + L_{22} I_2^2). \tag{17}$$

d) Vi er interessert i den induserte elektromotoriske spenningen e_{12} i spole 2 pga. strømmen i spole 1:

$$e_{12} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t} = -L_{12}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = L_{12} I_0 \omega \sin(\omega t). \tag{18}$$

e) Siden det ikke går noen strøm i spole 2, induseres det en emf i spole 1 bare pga. feltet fra strømmen I_1. Summen av kilder i spole 1 er dermed $V_1 + e_{11}$. Altså får vi $V_1 + e_{11} = RI_1 = 0$, dvs.

$$V_1 = -e_{11} = L_{11}\mathrm{d}I_1/\mathrm{d}t. \tag{19}$$

Ved integrasjon får vi dermed

$$I_1 = \frac{V_0}{\omega L_{11}} \sin(\omega t) + \bar{I}, \tag{20}$$

der $\bar{I}$ er en konstant. Siden vi bare er interessert i den tidsvarierende delen av strømmen, settes $\bar{I} = 0$.

f) Siden spole 2 har null resistans, vil den kreve at $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = 0$ (jfr. superledende sløyfe). Her er Φ fluksen gjennom et tverrsnitt av toroiden. (Spole 2 setter altså opp en strøm slik at enhver påtrykt fluksendring blir kansellert.) Summen av kilder i spole 1 er $V_1 + e_1 = V_1 - \mathrm{d}(N_1\Phi)/\mathrm{d}t = V_1$. Strømmen I_1 blir dermed

$$I_1 = \frac{V_1}{R} = \frac{V_0 \cos(\omega t)}{R}. \tag{21}$$

Spole 2 sørger for å kansellere feltvariasjonen pga I_1. Strømmen I_2 må derfor være slik at $N_1 I_1 + N_2 I_2 =$ konst., dvs.

$$I_2 = \tilde{I} - \frac{N_1}{N_2} I_1 = -\frac{N_1}{N_2}\frac{V_0 \cos(\omega t)}{R}, \tag{22}$$

der konstanten $\tilde{I}$ ble satt lik null (siden vi bare er interessert i den tidsvarierende delen av strømmen).

Oppgave 3

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)	x			
b)	x			
c)			x	
d)		x		
e)			x	