Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme 31. mai 2010

Oppgave 1

a) Av symmetrigrunner må det elektriske feltet være radielt rettet og uavhengig av ϕ, $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. Vi lar S være overflaten til en sylinder med radius r og lengde l. Ladningen per lengdeenhet på innerlederen kaller vi Q'. Gauss' lov gir:

$$\oint_S \epsilon \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi r l \epsilon E(r) = Q_{\text{innenfor } S} = \begin{cases} Q'l, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{1}$$

dvs

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi\epsilon r}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{2}$$

Vi finner Q' ved bruk av definisjonen av potensial:

$$V(a) - V(b) = V_0 - 0 = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q'}{2\pi\epsilon}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon}\ln\frac{b}{a}. \tag{3}$$

Altså får vi

$$Q' = \frac{2\pi\epsilon V_0}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{4}$$

Innsatt i (2) gir dette

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r = \begin{cases} \frac{V_0}{r\ln\frac{b}{a}}\vec{u}_r, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{5}$$

Det går også an å bruke Gauss' lov på differensialform, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, eller Poissons likning $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$ til å finne $\vec{E}$. Differensialoperatorene uttrykkes da i sylinderkoordinater, og man må bruke at $\rho = 0$ i det dielektriske mediet mellom lederne.

b) Potensial:

$$V(r) = \int_r^b E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} V_0, & \text{for } r < a \\ V_0 \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{for } r > b. \end{cases} \tag{6}$$

c) Kapasitans per lengdeenhet:

$$C' = \frac{Q'}{V(a) - V(b)} = \frac{Q'}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}. \tag{7}$$

d) Vi kan gjenta beregningene ovenfor for $\epsilon = \epsilon_0$, og får samme svar. Når det elektriske feltet er som før, mens mediet er forskjellig, må det bety at $\vec{D}$-feltet og dermed ladningen på lederne har endret seg. Fra (4) ser vi at ladningen per lengdeenhet på innerlederen har endret seg med

$$Q'_{\text{med vakuum}} - Q' = \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\ln \frac{b}{a}} - \frac{2\pi\epsilon V_0}{\ln \frac{b}{a}} \tag{8}$$

Dvs. batteriet har mottatt ladningen

$$\frac{2\pi\epsilon_0 l V_0}{\ln \frac{b}{a}}(\epsilon_r - 1) \tag{9}$$

fra innerlederen.

e) Når batteriet er frakoplet, kan ikke ladningen på lederne endres. Dvs. fra oppgave 1a) får vi

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\epsilon_r V_0}{r \ln \frac{b}{a}}\vec{u}_r, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{10}$$

Her er V_0 den potensialforskjellen *vi hadde* i oppgave 1a).

Etter vi har tatt ut mediet, endrer (4) seg til

$$Q' = \frac{2\pi\epsilon_0 V_1}{\ln \frac{b}{a}}, \tag{11}$$

der V_1 er den nye potensialforskjellen. Ved å kombinere (4) og (11) får vi

$$V_1 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} V_0 = \epsilon_r V_0. \tag{12}$$

Potensialforskjellen har altså økt.

Oppgave 2

a)

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{13}$$

b)

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}. \tag{14}$$

Her har vi brukt Stokes' teorem. Kurven C er den som begrenser flaten S, med retning i henhold til høyrehåndsregelen (når tommelen peker i retning av flatenormalen til S).

Oppgave 3

a) Da $\mu_r \gg 1$, kan vi anta at fluksen følger toroiden. Videre antar vi at flukslinjene ikke spres i luftgapene. Siden toroiden er tynn antar vi at $\vec{B}$-feltet er tilnærmet uniformt over tverrsnittet slik at fluksen blir $\Phi = \pi b^2 B$.

Det magnetiske feltet i materialet og luftgapet kan uttrykkes vha. fluksen som hhv. $H = \Phi/(\mu\pi b^2)$ og $H_{\text{luftgap}} = \Phi/(\mu_0 \pi b^2)$. Vi bruker Amperes lov på en lukket integrasjonskurve C langs feltlinjene (rundt den magnetiske kretsen):

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = \oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\Phi}{\pi\mu b^2}(2\pi a - d) + \frac{\Phi}{\pi\mu_0 b^2} d \tag{15}$$

dvs.

$$\Phi = \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{\frac{2\pi a - d}{\pi\mu b^2} + \frac{d}{\pi\mu_0 b^2}}. \tag{16}$$

Dette gir

$$\vec{H} = \frac{\Phi}{\pi\mu b^2}\vec{u}_\phi = \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{2\pi a - d + \mu_r d} \approx \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{2\pi a + \mu_r d} \tag{17}$$

og

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{18}$$

i toroidekjernen.

b) Selvinduktansen er definert som $L_{11} = \Phi_{11}/I_1$. Fluksen Φ_{11} er total fluks i spole 1 (dvs. summen av fluks i alle N_1 viklinger) pga. strømmen I_1. Dette gir

$$L_{11} = \frac{\pi\mu b^2 N_1^2}{2\pi a - d + \mu_r d} \approx \frac{\pi\mu b^2 N_1^2}{2\pi a + \mu_r d}. \tag{19}$$

Tilsvarende får vi den gjensidige induktansen

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} \approx \frac{\pi\mu b^2 N_1 N_2}{2\pi a + \mu_r d}. \tag{20}$$

c)

$$e_{12} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t} = -L_{12}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = L_{12} I_0 \omega \sin(\omega t), \tag{21}$$

der L_{12} er gitt ovenfor.

d) Siden det nå ikke er noen spole (dvs. den frie strømmen er null overalt), gir Amperes lov og symmetri at

$$0 = \oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H 2\pi a, \tag{22}$$

og derfor $\vec{H} = 0$ og $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \vec{M}$.

e) Siden både $\vec{B}$ og $\vec{M}$ er i ϕ-retning, må også $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ være det. Videre, siden B og M er konstante innen hvert materiale (toroidekjerne og luftgap), så er også H det. Amperes lov gir da

$$0 = \oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H(2\pi a - d) + H_{\text{luftgap}} d. \tag{23}$$

Siden fluksen er den samme i toroidekjernen og i luftgapet, og vi neglisjerer spredning av flukslinjer i luftgapet, er B-feltet i toroidekjernen lik B-feltet i luftgapet. Dette betyr at

$$\mu_0(H + M) = \mu_0 H_{\text{luftgap}}. \tag{24}$$

Løser man disse to likningene får man

$$\vec{H} = -\frac{d}{2\pi a}\vec{M}, \tag{25}$$

og

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \left(1 - \frac{d}{2\pi a}\right)\vec{M} \approx \mu_0 \vec{M}. \tag{26}$$

Oppgave 4

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				x
b)	x			
c)	x			
d)	x			
e)	x			