**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for elektronikk og telekommunikasjon**



# Løsningsforslag
# TFE4120 Elektromagnetisme 10. aug. 2010

## Oppgave 1

**a)** Fluksen av $\vec{B}$ gjennom en flate $S$ er

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{1}$$

**b)**

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}. \tag{2}$$

Her har vi brukt Stokes' teorem. Kurven $C$ er den som begrenser flaten $S$, med retning i henhold til høyrehåndsregelen (når tommelen peker i retning av flatenormalen til $S$).

**c)** Vektorpotensialet fra en strømsløyfe $C_1$ er gitt ved

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 \mathrm{d}\vec{l_1}}{r} \tag{3}$$

Ved bruk av (2) og (3) får vi derfor at

$$\Phi_{12} = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l_2} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}\vec{l_1} \cdot \mathrm{d}\vec{l_2}}{r}. \tag{4}$$

Altså:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}\vec{l_1} \cdot \mathrm{d}\vec{l_2}}{r}. \tag{5}$$

**d)** Da (5) er symmetrisk under ombytte av indeksene 1 og 2 har vi at $L_{21} = L_{12}$.

**e)** Siden resistansen i sløyfe 2 er uendelig, går det ingen strøm der. Da er all fluks pga. strømmen $I_1$. Altså blir det induserte emf'en

$$e_{12} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t} = -L_{12}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -L_{12} I_0 \omega \cos(\omega t). \tag{6}$$

**Oppgave 2**

**a)** Vi finner først feltet fra den venstre lederen vha. Gauss' lov. Symmetrien tilsier at feltet fra denne, $\vec{E}_v$, er rettet radielt utover fra $z$-aksen, og at $|\vec{E}_v|$ er konstant på en sylinderflate med $z$-aksen som akse. Dermed gir Gauss' lov på en sylinderflate med radius $r$ og lengde $l$ langs $z$-aksen at $2\pi r l \epsilon_0 E_v = Q' l$ og dermed

$$\vec{E}_v = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{u}_r, \tag{7}$$

for $r > a$. For $r < a$ blir $\vec{E}_v = 0$. Et tilsvarende resultat fås for den andre lederen, men vi må da huske på at $Q'$ må byttes ut med $-Q'$, og at $r$ og $\vec{u}_r$ må byttes ut med hhv. $r'$ og $\vec{u}_r'$, som er avstanden og den radielle enhetsvektoren ut fra den *høyre* lederens akse. Om vi summerer de to feltbidragene, fås totalfeltet

$$\vec{E} = \frac{Q'\vec{u}_x}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-d}\right), \tag{8}$$

for $a < x < d - a$.

**b)** Anta potensialet $V_0$ på den venstre lederen, og 0 på den høyre. Det er altså potensialet $V_0$ på et observasjonspunkt $x = a$ med referanse i $x = d - a$:

$$V_0 = \int_a^{d-a} E\mathrm{d}x = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\left[\ln|x| - \ln|x-d|\right]_a^{d-a} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}2\ln(d/a - 1). \tag{9}$$

Dette kan brukes til å eliminere $Q'$ fra (8):

$$\vec{E} = \frac{Q'\vec{u}_x}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-d}\right) = \frac{V_0\vec{u}_x}{2\ln(d/a-1)}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-d}\right) = \frac{V_0\vec{u}_x}{2\ln(d/a-1)}\frac{d}{x(d-x)} \tag{10}$$

utenfor begge lederne.

**c)**

$$C' = Q'/V_0 = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a-1)} \tag{11}$$

**d)** For en fast $a$ kan det elektriske feltet mellom lederne sfa. $x$ skrives

$$E(x) = \frac{\text{konst}}{x(d-x)}, \tag{12}$$

der konstanten avhenger av $a$. Ved å derivere $E(x)$ mhp. $x$ finner vi ut at funksjonen er minimum ved midtpunktet $x = d/2$, og øker mot kantene $x = a$ og $x = d - a$. Det maksimale feltet er altså rett utenfor lederne, for $x = a$ og $x = d - a$. Siden feltet er det samme for $x = a$ og $x = d - a$, holder det å sørge for at feltet ved $x = a$ er minst mulig, ved å endre på $a$.

Feltet ved $x = a$ er

$$E = \frac{V_0}{2\ln(d/a-1)}\frac{d}{a(d-a)} \tag{13}$$

Vi ser at $E$ blir uendelig for $a = 0$ og $a = d/2$. Om vi finner en ekstremalverdi for $0 < a < d/2$ må altså denne svare til et minimum. Deriverer mhp. $a$, og finner et nullpunkt i den deriverte når

$$(1 - 2a/d)\ln(d/a - 1) = 1. \tag{14}$$

Fra det som er oppgitt i oppgaveteksten, er altså løsningen $a = 0.176d$ (den andre løsningen tilfredsstiller ikke $a < d/2$).

**e)** Bruker Amperes lov for hver leder separat. Feltet fra den venstre lederen blir

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\phi. \tag{15}$$

Vha. superposisjon får vi

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \vec{u}_y}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) \tag{16}$$

for $a < x < d - a$.

**f)** Vi tenker oss at de to lederne koples til en kilde ved $z = 0$ og en last ved $z = l$, der $l \gg d$. Fluksen som går igjennom området begrenset av sløyfa blir

$$\Phi = l\int_a^{d-a} B\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 l I}{2\pi}\left[\ln|x| - \ln|x-d|\right]_a^{d-a} = \frac{\mu_0 l I}{\pi}\ln(d/a-1). \tag{17}$$

Selvinduktansen per lengdeenhet blir altså

$$L' = (\Phi/I)/l = \frac{\mu_0}{\pi}\ln(d/a-1). \tag{18}$$

Kommentar til denne oppgaven: Antagelsen at strømmen og ladningen er jevnt fordelt over lederenes overflate kan rettferdiggjøres i grensen $d/a \gg 1$. Det bør derfor godtas om noen skulle f.eks. ha tilnærmet $d/a - 1 \approx d/a$.

**Oppgave 3**

| Spørsmål | Alt. i) | Alt. ii) | Alt. iii) | Alt. iv) |
|---|---|---|---|---|
| a) | x | | | |
| b) | | | | x |
| c) | | | x | |
| d) | | | x | |
| e) | | x | | |