



Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme 3. juni 2009

Oppgave 1

- a) Kildene til sirkulasjonen av det magnetiske feltet er ifølge den generaliserte Amperes lov $\vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t = \sigma\vec{E} + \epsilon\partial\vec{E}/\partial t$. Når det elektriske feltet er på formen angitt i oppgaven, blir dette

$$\sigma\vec{E}_0 \cos(\omega t) - \epsilon\omega\vec{E}_0 \sin(\omega t). \quad (1)$$

Vi ser at det siste leddet (forskyvingsstrømmen) dominerer for høye frekvenser, mens det første leddet (dvs. strømmen) dominerer for lave frekvenser. Man kan dermed se på mediet som en leder ved lave frekvenser, og isolator ved høye frekvenser.

- b) Leddene har lik amplitude når $\sigma = \epsilon\omega$, dvs. $\omega = \sigma/\epsilon$.

c)

$$\partial\rho/\partial t = -\nabla \cdot \vec{J} = -\sigma\nabla \cdot \vec{E} = -(\sigma/\epsilon)\nabla \cdot \vec{D} = -(\sigma/\epsilon)\rho. \quad (2)$$

- d) Likningen ovenfor er en enkel, førsteordens difflikning. Ved å løse denne fås det oppgitte uttrykket. Tolkning: Hvis det er ladning ved $t = 0$ i et uniformt medium, vil den dissipere/forsvinne eksponensielt. Dvs. ladningen vil flytte seg bort fra det uniforme området til ikke-uniforme områder eller diskontinuiteter/overflater. Legg merke til at uniformiteten er en viktig forusetning for utledningen i forrige punkt, og derfor for uttrykket som skal tolkes. Evt. kan ladning også kombineres med ladning av motsatt fortegn.
- e) Strømtettheten er $\vec{J} = NQ\vec{v}$, der N er antall frie ladninger per volumenhet, Q er ladningen til hver av dem og \vec{v} er midlere driftshastighet. Vi får dermed

$$|\vec{v}| = \frac{|\vec{J}|}{Ne} = \frac{I}{SNe} = 0.74 \text{ mm/s}. \quad (3)$$

For en god leder er altså driftshastigheten ingenting å slå i bordet med! (Signalthastigheten er likevel meget stor - den kan nærme seg lyshastigheten i vakuum.)

Oppgave 2

- a) Da $\mu_r \gg 1$, kan vi anta at fluksen følger toroiden. Videre antar vi at flukslinjene ikke spres i luftgapene. Siden toroiden er tynn antar vi at \vec{B} -feltet er tilnærmet uniformt over tverrsnittet slik at fluksen blir $\Phi = Bb^2$.

Når vi skal bruke Amperes lov på en lukket integrasjonskurve langs feltlinjene (rundt den magnetiske kretsen), får vi bare bidrag fra luftgapene siden $H = \Phi/(\mu_0\mu_r b^2) = 0$ i materialet når $\mu_r = \infty$. Vi får derfor:

$$NI = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2 \cdot \frac{\Phi}{\mu_0 b^2} g \quad (4)$$

dvs.

$$\Phi = \frac{\mu_0 b^2 NI}{2g}. \quad (5)$$

Selvinduktans:

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 b^2 N^2}{2g}. \quad (6)$$

Merk at spolens totale fluks er $N\Phi$ siden det er N viklinger.

- b) Total magnetisk energi kan finnes ved å integrere energitettheten $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$ overalt der det finnes \vec{B} og \vec{H} , dvs i luftgapene. Evt. kan vi bruke at den totale magnetiske energien er

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu_0 b^2 N^2 I^2}{4g}. \quad (7)$$

- c) Siden strømmen antas å være konstant, finnes kraften vha. $\vec{F} = \nabla W_m$. Kraften som virker i positiv "g"-retning er derfor gitt ved

$$F = \frac{\partial W_m}{\partial g} = -\frac{\mu_0 b^2 N^2 I^2}{4g^2}. \quad (8)$$

Fortegnet viser at det virker en kraft $\mu_0 b^2 N^2 I^2 / (4g^2)$ i negativ "g"-retning, dvs. den prøver å redusere luftgapet. For at kraften akkurat skal balansere tyngdekraften, må $mg_g = \mu_0 b^2 N^2 I^2 / (4g^2)$, der g_g er tyngdeaksellerasjonen:

$$I = \sqrt{\frac{4mg_g g^2}{\mu_0 b^2 N^2}} = \frac{2g}{bN} \sqrt{\frac{mg_g}{\mu_0}}. \quad (9)$$

Oppgave 3

- a) Selvinduktansen er $L = \Phi/I$, der I er strømmen gjennom spolene, og Φ er den totale fluksen (fluksgjennomstrømmingen) til de to spolene. Dvs. Φ er fluksen i den ene + fluksen i den andre. Dette gir

$$L = \frac{(\Phi_{11} + \Phi_{21}) + (\Phi_{12} + \Phi_{22})}{I} = \frac{L_{11}I + L_{21}I + L_{12}I + L_{22}I}{I} = L_{11} + 2L_{12} + L_{22}. \quad (10)$$

- b) Emf'en som induseres i spole 1 pga. strømmen i spole 1 er $e_{11} = -V(t)$. Tilsvarende kaller vi emf'en som induseres i spole 2 for e_{12} . Vi har at

$$\frac{e_{12}}{e_{11}} = \frac{-L_{12}dI_1/dt}{-L_{11}dI_1/dt} = \frac{L_{12}}{L_{11}}, \quad (11)$$

der I_1 er strømmen i spole 1. Spenningen som vises på oscilloskopet blir

$$V_{\text{osc}}(t) = -\frac{L_{12}}{L_{11}}V(t). \quad (12)$$

Oppgave 4

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)		x		
b)				x
c)		x		
d)			x	
e)		x		