Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme 3. august 2009

Oppgave 1

a) Kraften på punktladningen q fra punktladningen Q er gitt av Coulombs lov

$$\vec{F} = \frac{qQ\vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{1}$$

Her er ϵ_0 permittiviteten i vakuum, og $\vec{u}_r = \vec{r}/r$, der $\vec{r}$ er definert som vektoren fra Q til q.

b) Bruk f.eks. Laplace' likning. Gir $V = V_0(1 - x/d)$ og $\vec{E} = -\nabla V = (V_0/d)\vec{u}_x$ mellom platene.

c) Gauss' lov $\nabla \cdot \vec{D} = \rho = 0$ gir for denne geometrien at $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x = 0$, altså at D er konstant. Integrerer det elektriske feltet fra $x = 0$ til $x = d$ for å relatere til V_0:

$$V_0 = \int_0^d E\mathrm{d}x = x(D/\epsilon_0) + \Delta x(D/\epsilon) + (d - x - \Delta x)(D/\epsilon_0), \tag{2}$$

dvs.

$$D = \frac{\epsilon_0 V_0}{d - \Delta x + \Delta x/\epsilon_r}. \tag{3}$$

Det elektriske feltet blir dermed

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{V_0\vec{u}_x}{\epsilon_r(d-\Delta x)+\Delta x} & \text{i den dielektriske skiven} \\ \frac{V_0\vec{u}_x}{d-\Delta x+\Delta x/\epsilon_r} & \text{i vakuum} \end{cases} \tag{4}$$

d) Det vil være bunden flateladning på hver side av den dielektriske skiven. Hvis $\epsilon_r \approx \infty$, vil det elektriske feltet i skiva bli tilnærmet null (se uttrykket i forrige punkt). Den bundne flateladningen på hver side av skiven må dermed være akkurat like stor som flateladningen på kondensatorplatene. De elektriske feltlinjene vil da f.eks. starte på plata i $x = 0$ og ende opp på de bundne ladningene i x, slik at de ikke går videre inn i skiva. Bortsettfra flateladning på kondensatorplatene, og bunden flateladning på de to overflatene til skiva, vil der ikke være ladning.

e) Fordi dielektriske medier inneholder bundne ladninger, kan det godt virke krefter på dem (selv om skivas netto ladning er null). Jfr. eksperimentet med den ladde kammen som tiltrekker seg nøytrale papirlapper. I dette tilfellet kan vi finne ut om det virker noen netto kraft når vi summerer kreftene på de to flatene.

Det elektriske feltet i vakuumet som omgir skiva er $E = V_0/(d - \Delta x)$ overalt, rettet i positiv x-retning. Den bundne flateladningen i $x + \Delta x$ balanserer akkurat den negative bundne flateladningen i x. Siden det elektriske feltet på hver side av skiva er det samme, vil kreftene på de to endene akkurat kansellere hverandre.

Oppgave 2

a) Da det ikke går noen magnetisk fluks gjennom sløyfen som består av motstanden R_1 og voltmeteret V_1, får vi fra Faradays lov at den induserte elektromotoriske spenningen i denne sløyfen blir null. Altså vil voltmeteret V_1 måle spenningen over motstanden R_1. Tilsvarende har vi at voltmeteret V_2 måler spenningen over motstanden R_2. Spenningen V_s på sekundærspolen er relatert til V_p ved hjelp av

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{1}{N_p}, \tag{5}$$

siden sekundærspolen har èn vikling. Vi har at $V_1 + V_2 = V_s$, og siden strømmen gjennom R_1 er den samme som strømmen gjennom R_2, har vi at $\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2}$. Altså

$$V_s = V_1 + V_2 = V_1 + \frac{R_2}{R_1}V_1 = \frac{R_1}{R_2}V_2 + V_2, \tag{6}$$

slik at vi kan skrive

$$V_s = \frac{R_1 + R_2}{R_1}V_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_2}V_2. \tag{7}$$

Fra relasjonen (5) får vi

$$V_s = \frac{V_p}{N_p}, \tag{8}$$

som gir

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\frac{V_p}{N_p}, \tag{9}$$

og

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\frac{V_p}{N_p}. \tag{10}$$

Voltmetrene måler rms-amplitudene, så en faktor $1/\sqrt{2}$ må inkluderes. Måleresultatene for voltmeter V_1 og V_2 blir henholdsvis

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{R_1}{R_1 + R_2}\frac{V_0}{N_p}, \tag{11}$$

og

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{R_2}{R_1 + R_2}\frac{V_0}{N_p}. \tag{12}$$

Oppgave 3

a) Se på uttrykket for energi i to spoler: $W_m = \frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2 + L_{12}I_1I_2$. Energien må være positiv. Den oppgitte dobbeltulikheten fås ved å la først $I_1 = I_2$, deretter $I_1 = -I_2$.

b) Selvinduktansen er $L = \Phi/I$, der I er strømmen gjennom spolene, og Φ er den totale fluksen (fluksgjennomstrømmingen) til de to spolene. Dvs. Φ er fluksen i den ene + fluksen i den andre. Dette gir

$$L = \frac{(\Phi_{11} + \Phi_{21}) + (\Phi_{12} + \Phi_{22})}{I} = \frac{L_{11}I + L_{21}I + L_{12}I + L_{22}I}{I} = L_{11} + 2L_{12} + L_{22}. \tag{13}$$

Ved å bruke ulikheten fra forrige punkt, fås den ønskede ulikhet.

c) Se på to enkle sløyfer av en leder, med selvinduktanser L. Disse seriekoples og plasseres på akkurat samme sted, først med motsatt orientering. Da vil en strøm i den ene sløyfa gi et motsatt magnetfelt av det som produseres av det andre; dvs. totalt magnetisk flukstetthet er null. Dvs. total selvinduktans $L_{\text{tot}} = 0$. Hvis de plasseres på akkurat samme sted, med lik orientering, vil feltene adderes opp, og dessuten strømme gjennom begge to, slik at den totale selvinduktansen blir $L_{\text{tot}} = 4L$. Plasseres de på vidt forskjellige steder, slik at feltet fra den ene ikke gir en fluks i den andre, blir $L_{\text{tot}} = 2L$.

Oppgave 4

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)		x		
b)				x
c)				x
d)				x
e)				x