Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme, mai 2008

Oppgave 1

a) Siden $S \gg d^2$ kan vi se bort fra randeffekter og regne som om platene er uendelig store. Symmetri gjør da at vi kun får elektrisk felt normalt på planene. La den negativt ladede lederen ligge i x-y planet, slik at retningen på det elektriske feltet er i z-retning. Mellom lederne gir Gauss' lov på punktform

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z}\vec{u}_z = 0 \Rightarrow \vec{E} = k\vec{u}_z, \tag{1}$$

der k er en konstant. Potensialet er gitt ved

$$V_0 = \int_0^d \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{z} = kd. \tag{2}$$

Vi finner dermed at det elektriske feltet mellom platene er gitt ved

$$\vec{E} = \frac{V_0}{d}\vec{u}_z. \tag{3}$$

b) Fra grensebetingelsene for det elektriske feltet har vi at $Q = \sigma S = S\epsilon_0 E = s\epsilon_0 V_0/d$. Vi finner dermed at

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{S\epsilon_0}{d}. \tag{4}$$

c) Vi ser fra oppgave a) at feltet er uavhengig av ϵ, men heller avhengig av potensialforskjellen mellom platene. Dette betyr at for å opprettholde samme spenning med et nytt medium mellom lederene må spenningskilden øke ladningen på lederene. Den nye ladningen på platene er gitt ved $Q = S\epsilon V_0/d$.

Oppgave 2

a) Symmetri gjør at alt feltet sirkulerer rundt lederen og at det kun er avhengig av avstanden fra sentrum av lederen. I sylinderkoordinater betyr dette at $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\varphi$. Vi legger inn en sirkulær integrasjonssløyfe C med radius r og samme sentrum som lederen. La S være flaten innenfor sløyfen C. Amperes lov gir da

$$\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi r \frac{B(r)}{\mu_0} = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \begin{cases} I\frac{r^2}{a^2} & \text{for} \quad r < a, \\ I & \text{for} \quad r \geq a. \end{cases} \tag{5}$$

Dermed får vi at

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{I\mu_0 r}{2\pi a^2}\vec{u}_\varphi & \text{for} \quad r < a, \\ \frac{I\mu_0}{2\pi r}\vec{u}_\varphi & \text{for} \quad r \geq a. \end{cases} \tag{6}$$

b) Vi ser at strømretningen er slik at L_{12} er positiv. Dermed får vi at

$$L_{12} = \frac{\int_{\text{rektangel}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{I} = \frac{\int_R^{R+B} \frac{I\mu_0}{2\pi x} l \mathrm{d}x}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{R+b}{R}\right). \tag{7}$$

c) Vi finner ved hjelp av Faradays lov

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -L_{12}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = L_{12} I_0 \omega \sin(\omega t)\,. \tag{8}$$

Oppgave 3

a) Siden det elektriske feltet er uniformt så får man at $E = V/l$ og dermed at

$$I = \int_{\text{tverrsnitt}} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sigma \pi r^2 \frac{V}{l}, \tag{9}$$

slik at

$$R = \frac{V}{I} = \frac{l}{\sigma \pi r^2}. \tag{10}$$

b) Effekttapet per volumenhet er gitt som

$$p_j = \vec{J} \cdot \vec{E} \tag{11}$$

Totalt effekttap blir derfor

$$P_j = \int_v \vec{J} \cdot \vec{E} \mathrm{d}v = v\sigma E^2 = l\pi r^2 \sigma \frac{V^2}{l^2} = \frac{V^2}{R}. \tag{12}$$

c) Siden det elektriske feltet er uniformt så får man at $E = V/l$. I kjernen er strømtettheten $J_k = \sigma_k E$ og utenfor er strømtettheten $J = \sigma E$. Vi får dermed at

$$I = \int_{\text{tverrsnitt}} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sigma_k \frac{V}{l} \pi r_k^2 + \sigma \frac{V}{l} \pi \left(r^2 - r_k^2\right), \tag{13}$$

slik at

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{\frac{\sigma_k \pi r_k^2}{l} + \frac{\sigma\pi\left(r^2 - r_k^2\right)}{l}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}, \tag{14}$$

der $R_1 = l/(\sigma_k \pi r_k^2)$ og $R_2 = l/(\sigma\pi\left(r^2 - r_k^2\right))$. Dette er parallellkobling av to resistanser. Dersom vi setter $\sigma_k = \sigma$ får vi igjen svaret fra oppgave a).

d) Tilnærmer resistansen som mange seriekoblede resistanser med lengde dx og radius $r = a + (b-a)x/l$, der x går fra 0 til l. Dermed blir

$$R = \int_0^l \frac{1}{\sigma\pi\left(a + (b-a)\frac{x}{l}\right)^2} \mathrm{d}x. \tag{15}$$

Substituerer med $u = a + (b-a)x/l$ slik at $\mathrm{d}u = (b-a)/l\mathrm{d}x$. Dermed får man

$$R = \frac{l}{(b-a)\sigma\pi} \int_a^b u^{-2} \mathrm{d}u = \frac{l}{(b-a)\sigma\pi}[-u^{-1}]_a^b = \frac{l}{ab\sigma\pi}. \tag{16}$$

Som man ser er det den samme resistansen som for en sirkulær leder med radius lik den geometriske middelverdien av radiusen av endeflatene.

Oppgave 4

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)			x	
b)			x	
c)				x
d)	x			
e)			x	