

Løsningsforslag

TFE4120 Elektromagnetisme, august 2008

Oppgave 1

- a) Av symmetrigrunner må det elektriske feltet være radielt rettet og uavhengig av ϕ , $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. Vi lar S være overflaten til en sylinder med radius r og lengde l . Ladningen per lengdeenhet på innerlederen kaller vi Q' . Gauss' lov gir:

$$\oint_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r l \epsilon_0 \frac{k}{r^2} E(r) = Q_{\text{innenfor } S} = \begin{cases} Q'l, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \quad (1)$$

dvs

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q'r}{2\pi\epsilon_0 k}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (2)$$

Vi finner Q' ved bruk av definisjonen av potensial:

$$V(a) - V(b) = V_0 - 0 = \int_a^b E(r) dr = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 k} \int_a^b r dr = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 k} (b^2 - a^2). \quad (3)$$

Altså får vi

Innsatt i (2) gir dette

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r = \begin{cases} \frac{2V_0 r}{(b^2 - a^2)} \vec{u}_r, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (4)$$

- b) Kapasitans per lengdeenhet:

$$C' = \frac{Q'}{V(a) - V(b)} = \frac{Q'}{V_0} = \frac{4\pi\epsilon_0 k}{(b^2 - a^2)}. \quad (5)$$

- c) Av symmetrigrunner må \vec{H} og \vec{B} kun ha en ϕ -komponent og kun være avhengig av r , dvs. $\vec{H} = H(r)\vec{u}_\phi$ og $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\phi$. (\vec{B} kan ikke ha en radiell komponent fordi fluksen ut av en lukket flate (f.eks. en sylinderflate) er alltid null.)

Ampères lov anvendt på en sirkulær integrasjonssløyfe med sentrum i midten av koaksialkabelen gir:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H2\pi r = \begin{cases} I, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (6)$$

Husk at strømmen skulle antas å gå på overflaten av innerlederen og på den indre overflaten av ytterlederen. Vi får:

$$\vec{H} = H(r)\vec{u}_\phi = \begin{cases} \frac{I}{2\pi r}\vec{u}_\phi, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (7)$$

- d) Selvinduktansen er definert ved

$$L = \frac{\Phi}{I}. \quad (8)$$

Vi får direkte fra resultatet i forrige oppgave at

$$\vec{B} = B(r)\vec{u}_\phi = \begin{cases} \frac{\mu I}{2\pi r}\vec{u}_\phi, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (9)$$

Dersom det går en konstant strøm i kabelen, må den være lukket i begge ender (kilde og last), og Φ er fluksen som går igjennom denne lukkede sløyfa. Hvis vi antar at kabelens lengde er l , får vi

$$\Phi = l \int_a^b B dr = \frac{\mu l I}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu l I \ln \frac{b}{a}}{2\pi}, \quad (10)$$

og dermed en induktans per lengdeenhet

$$L' = \frac{L}{l} = \frac{\Phi}{lI} = \frac{\mu \ln \frac{b}{a}}{2\pi} \quad (11)$$

e) I området mellom lederne er $\vec{E} \perp \vec{H}$. Siden \vec{E} , \vec{H} og \vec{p} utgjør et høyrehåndssystem så vil $\vec{p} = p\vec{u}_z$ der p er gitt ved

$$p = EH = \begin{cases} \frac{V_0 I}{\pi(b^2 - a^2)}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (12)$$

f) Vi får at

$$P = \int_S \vec{p} \cdot d\vec{S} = \int_a^b 2p\pi r dr = \frac{2V_0 I}{(b^2 - a^2)} \int_a^b r dr = V_0 I. \quad (13)$$

Siden det går en konstant strøm gjennom kabelen, må den være lukket med en kilde i den ene enden, og en last i den andre. Vi får at P er effekten som dissiperes i en motstand plassert imellom den indre og den ytre lederen. Dermed virker det som om \vec{S} er effekt per arealenheter transportert fra kilden til lasten av det elektromagnetiske feltet.

Oppgave 2

Her burde det vært angitt at man kan se bort fra selvinduktansen til sløyfa, noe man kan gjøre for tilstrekkelig stor R .

a) Arealet til sløyfen er gitt ved $S(t) = lx + k$, der k er en konstant. Vi får dermed at

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\vec{B} \cdot d\vec{S}}{dt} = -\frac{-BdS(t)}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Blv. \quad (14)$$

Dermed blir strømmen

$$I = \frac{e}{R} = \frac{Blv}{R}. \quad (15)$$

Som vi ser gjelder dette uansett om hastigheten ikke hadde vært konstant. (Det får vi bruk for i siste deloppgave.)

b) Den magnetiske kraften finner vi som

$$\vec{F}_m = \int_{\text{rett leder}} Id\vec{l} \times \vec{B} = -IlB\vec{u}_x. \quad (16)$$

Siden hastigheten er konstant må den mekaniske kraften være like stor som den magnetiske. Vi får dermed at

$$v = \frac{IR}{Bl} = \frac{F_{\text{mek}}R}{B^2 l^2}. \quad (17)$$

c) Arbeidet utført av den mekaniske kilden i løpet av dt er gitt ved

$$dA = F_{\text{mek}} dx = F_{\text{mek}} v dt = IlBv dt, \quad (18)$$

slik at effekten fra den mekaniske kilden er gitt ved

$$P = \frac{dA}{dt} = IlBv. \quad (19)$$

Effekten forbrent i motstanden er gitt ved

$$P_R = RI^2 = RI \left(\frac{Bvl}{R} \right) = IlBv. \quad (20)$$

d) Vi finner nettokraften (i positiv x -retning)

$$F_{\text{netto}} = F_{\text{mek}} - F_{\text{mag}} = F_{\text{mek}} - IlB = F_{\text{mek}} - \frac{B^2 l^2}{R} v. \quad (21)$$

Vi antar at den rette lederen har masse m og får fra Newtons 2. lov differensiallikningen

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 l^2}{Rm} v = \frac{F_{\text{mek}}}{m}. \quad (22)$$

Likningen har homogen løsning

$$v_{\text{hom}} = K e^{-\lambda t}, \quad (23)$$

der K er en konstant og $\lambda = B^2 l^2 / Rm$. Partikulærløsningen er gitt ved

$$v_{\text{part}} = \frac{F_{\text{mek}}}{\lambda m}. \quad (24)$$

Dermed er den totale løsningen gitt ved

$$v(t) = v_{\text{hom}} + v_{\text{part}} = K e^{-\lambda t} + \frac{F_{\text{mek}}}{\lambda m}. \quad (25)$$

K elimineres ved å bruke initialbetingelsen $v(0) = 0$ slik at

$$v(t) = \frac{F_{\text{mek}} R}{B^2 l^2} (1 - e^{-\lambda t}). \quad (26)$$

Vi ser at i grensen når $t \rightarrow \infty$ får vi igjen hastigheten fra oppgave b).

Oppgave 3

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)			x	
b)			x	
c)			x	
d)			x	
e)			x	