Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme, august 2008

Oppgave 1

a) Av symmetrigrunner må det elektriske feltet være radielt rettet og uavhengig av ϕ, $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. Vi lar S være overflaten til en sylinder med radius r og lengde l. Ladningen per lengdeenhet på innerlederen kaller vi Q'. Gauss' lov gir:

$$\oint_S \epsilon \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi r l \epsilon_0 \frac{k}{r^2} E(r) = Q_{\text{innenfor } S} = \begin{cases} Q'l, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{1}$$

dvs

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q'r}{2\pi\epsilon_0 k}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{2}$$

Vi finner Q' ved bruk av definisjonen av potensial:

$$V(a) - V(b) = V_0 - 0 = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 k} \int_a^b r\mathrm{d}r = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 k}\left(b^2 - a^2\right). \tag{3}$$

Altså får vi

Innsatt i (2) gir dette

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r = \begin{cases} \frac{2V_0 r}{(b^2 - a^2)}\vec{u}_r, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{4}$$

b) Kapasitans per lengdeenhet:

$$C' = \frac{Q'}{V(a) - V(b)} = \frac{Q'}{V_0} = \frac{4\pi\epsilon_0 k}{(b^2 - a^2)}. \tag{5}$$

c) Av symmetrigrunner må $\vec{H}$ og $\vec{B}$ kun ha en ϕ-komponent og kun være avhengig av r, dvs. $\vec{H} = H(r)\vec{u}_\phi$ og $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\phi$. ($\vec{B}$ kan ikke ha en radiell komponent fordi fluksen ut av en lukket flate (f.eks. en sylinderflate) er alltid null.)

Ampères lov anvendt på en sirkulær integrasjonssløyfe med sentrum i midten av koaksialkabelen gir:

$$\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H2\pi r = \begin{cases} I, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{6}$$

Husk at strømmen skulle antas å gå på overflaten av innerlederen og på den indre overflaten av ytterlederen. Vi får:

$$\vec{H} = H(r)\vec{u}_\phi = \begin{cases} \frac{I}{2\pi r}\vec{u}_\phi, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{7}$$

d) Selvinduktansen er definert ved

$$L = \frac{\Phi}{I}. \tag{8}$$

Vi får direkte fra resultatet i forrige oppgave at

$$\vec{B} = B(r)\vec{u}_\phi = \begin{cases} \frac{\mu I}{2\pi r}\vec{u}_\phi, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{9}$$

Dersom det går en konstant strøm i kabelen, må den være lukket i begge ender (kilde og last), og Φ er fluksen som går igjennom denne lukkede sløyfa. Hvis vi antar at kabelens lengde er l, får vi

$$\Phi = l \int_a^b B \mathrm{d}r = \frac{\mu l I}{2\pi} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu l I \ln \frac{b}{a}}{2\pi}, \tag{10}$$

og dermed en induktans per lengdeenhet

$$L' = \frac{L}{l} = \frac{\Phi}{lI} = \frac{\mu \ln \frac{b}{a}}{2\pi} \tag{11}$$

e) I området mellom lederne er $\vec{E} \perp \vec{H}$. Siden $\vec{E}$, $\vec{H}$ og $\vec{p}$ utgjør et høyrehåndssystem så vil $\vec{p} = p\vec{u}_z$ der p er gitt ved

$$p = EH = \begin{cases} \frac{V_0 I}{\pi(b^2-a^2)}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{12}$$

f) Vi får at

$$P = \int_S \vec{p} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_a^b p 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{2V_0 I}{(b^2 - a^2)} \int_a^b r \mathrm{d}r = V_0 I. \tag{13}$$

Siden det går en konstant strøm gjennom kabelen, må den være lukket med en kilde i den ene enden, og en last i den andre. Vi får at P er effekten som dissiperes i en motstand plassert imellom den indre og den ytre lederen. Dermed virker det som $|\vec{p}|$ er effekt per arealenhet transportert fra kilden til lasten av det elektromagnetiske feltet, og retningen $\vec{p}/|\vec{p}|$ er retningen til denne energistrømtettheten.

Oppgave 2

Her burde det vært angitt at man kan se bort fra selvinduktansen til sløyfa, noe man kan gjøre for tilstrekkelig stor R.

a) Arealet til sløyfen er gitt ved $S(t) = lx + k$, der k er en konstant. Vi får dermed at

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t} = -\frac{-B\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = Bl\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Blv. \tag{14}$$

Dermed blir strømmen

$$I = \frac{e}{R} = \frac{Bvl}{R}. \tag{15}$$

Som vi ser gjelder dette uansett om hastigheten ikke hadde vært konstant. (Det får vi bruk for i siste deloppgave.)

b) Den magnetiske kraften finner vi som

$$\vec{F}_m = \int_{\text{rett leder}} I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = -IlB\vec{u}_x. \tag{16}$$

Siden hastigheten er konstant må den mekaniske kraften være like stor som den magnetiske. Vi får dermed at

$$v = \frac{IR}{Bl} = \frac{F_{\text{mek}} R}{B^2 l^2}. \tag{17}$$

c) Arbeidet utført av den mekaniske kilden i løpet av $\mathrm{d}t$ er gitt ved

$$\mathrm{d}A = F_{\text{mek}}\mathrm{d}x = F_{\text{mek}}v\mathrm{d}t = IlBv\mathrm{d}t, \tag{18}$$

slik at effekten fra den mekaniske kilden er gitt ved

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = IlBv. \tag{19}$$

Effekten forbrent i motstanden er gitt ved

$$P_R = RI^2 = RI\left(\frac{Bvl}{R}\right) = IlBv. \tag{20}$$

d) Vi finner nettokraften (i positiv x-retning)

$$F_{\text{netto}} = F_{\text{mek}} - F_{\text{mag}} = F_{\text{mek}} - IlB = F_{\text{mek}} - \frac{B^2l^2}{R}v. \tag{21}$$

Vi antar at den rette lederen har masse m og får fra Newtons 2. lov differensiallikningen

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2l^2}{Rm}v = \frac{F_{\text{mek}}}{m}. \tag{22}$$

Likningen har homogen løsning

$$v_{\text{hom}} = Ke^{-\lambda t}, \tag{23}$$

der K er en konstant og $\lambda = B^2l^2/Rm$. Partikulærløsningen er gitt ved

$$v_{\text{part}} = \frac{F_{\text{mek}}}{\lambda m}. \tag{24}$$

Dermed er den totale løsningen gitt ved

$$v(t) = v_{\text{hom}} + v_{\text{part}} = Ke^{-\lambda t} + \frac{F_{\text{mek}}}{\lambda m}. \tag{25}$$

K elimineres ved å bruke initialbetingelsen $v(0) = 0$ slik at

$$v(t) = \frac{F_{\text{mek}}R}{B^2l^2}(1 - e^{-\lambda t}). \tag{26}$$

Vi ser at i grensen når $t \to \infty$ får vi igjen hastigheten fra oppgave b).

Oppgave 3

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)			x	
b)			x	
c)			x	
d)			x	
e)			x	