Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme 6. juni 2007

Oppgave 1

a) Denne oppgaven løses enklest ved å bruke Gauss' lov (jfr. øving 2, oppg. 1).
Svar:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon a^3}\vec{u}_r & \text{for } r < a, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r & \text{for } r \geq a. \end{cases} \tag{1}$$

b) Med referanse i $r = \infty$ fås $V(r) = \int_r^\infty E(r)\mathrm{d}r$, dvs.

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\epsilon a}\left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right) & \text{for } r < a, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r} & \text{for } r \geq a. \end{cases} \tag{2}$$

Husk at når potensialet for $r < a$ skal finnes, må man dele opp integralet som følger: $\int_r^\infty E(r)\mathrm{d}r = \int_r^a E(r)\mathrm{d}r + \int_a^\infty E(r)\mathrm{d}r$. Her brukes $E(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon a^3}$ for $r < a$ og $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$ for $r \geq a$.

c) Først finner vi den verdien av k som gir totalladning lik Q:

$$Q = \int_v \rho \mathrm{d}v = \int_0^a kr4\pi r^2 dr = k\pi a^4, \tag{3}$$

dvs

$$k = \frac{Q}{\pi a^4}. \tag{4}$$

For $r < a$ får vi altså

$$\epsilon \oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E(r)4\pi r^2 = \int_0^r \rho 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \int_0^r \frac{Q}{\pi a^4} r 4\pi r^2 \mathrm{d}r = Q\frac{r^4}{a^4}. \tag{5}$$

Det gir at

$$\vec{E} = \frac{Qr^2}{4\pi\epsilon a^4}\vec{u}_r. \tag{6}$$

For $r \geq a$ får vi samme regning og resultat som i a).

d) Regningen og svaret blir helt likt som i forrige deloppgave. Når ϵ blir stor, blir altså det elektriske feltet lite. Dette kan forklares ved at dipolene i området $r > a$ gir en negativ, bunden flateladning på kuleflaten $r = a^+$. Denne bidrar også til det elektriske feltet, og skjermer dermed den (antatt positive) Q. (Tegn opp dipolene for $r > a$.)

Oppgave 2

a) Siden alle strømelementer er i y-retning, kan ikke $\vec{B}$ ha noen y-komponent. Dette sees direkte fra Biot-Savarts lov. Feltet $\vec{B}$ kan heller ikke ha noen z-komponent siden dette ville måtte bryte loven om at $\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$ for en flate S som omslutter planet (flaten lukkes i uendeligheten). Alternativt resonnement: Tenk deg at du snur strømretningen. Via Biot-Savarts lov medfører det at $\vec{B}$ også snur, dvs. z-komponenten endrer fortegn. Hvis du nå roterer planet slik at strømretningen er som før, er du i samme situasjon som før, bortsettfra at z-komponenten av $\vec{B}$ har endret fortegn. Dette innebærer en selvmotsigelse med mindre z-komponenten er null.

b) Fra forrige deloppgave har vi at $\vec{B} = B\vec{u}_x$. Det gjenstår å finne B. Først legger vi merke til at symmetrien tilsier at $\vec{B}(-z) = -\vec{B}(z)$. Ved å bruke Amperes lov på en rektangulær integrasjonssløyfe i xz-planet fås dermed $2(B_0/\mu_0)a = J_s a$, der a er lengden av sløyfa langs x-retning. Dvs.

$$\vec{B} = \begin{cases} +B_0\vec{u}_x, & \text{for } z > 0, \\ -B_0\vec{u}_x, & \text{for } z < 0, \end{cases} \tag{7}$$

der $B_0 = \mu_0 J_s/2$.

c) Superposisjon gir at

$$\vec{B} = \begin{cases} 2B_0\vec{u}_x = \mu_0 J_s \vec{u}_x, & \text{for } 0 < z < d, \\ 0, & \text{for } z < 0 \text{ eller } z > d. \end{cases} \tag{8}$$

d) Kraften på et strømelement $-\vec{J}_s dS$ i planet $z = d$ pga feltet fra planet $z = 0$ er $\mathrm{d}\vec{F} = (-\vec{J}_s \mathrm{d}S) \times \vec{B}$. Kraften per arealenhet er altså

$$\mathrm{d}\vec{F}/\mathrm{d}S = -\vec{J}_s \times \vec{B} = J_s B_0 \vec{u}_z = (\mu_0 J_s^2/2)\vec{u}_z. \tag{9}$$

Siden det bare er felt mellom platene, blir den magnetiske energien per arealenhet $(\frac{1}{2}(2B_0)^2/\mu_0)d$. Siden flatestrømmene er konstante, finnes kraften vha. $\vec{F} = \nabla W_m$, der W_m er den magnetiske energien. Kraften per arealenhet blir derfor $2B_0^2/\mu_0 = \mu_0 J_s^2/2$, med retning langs retningen av økende d, altså frastøtende.

e) Vi ser på en lengde l av kabelen (i y-retning). Siden $a \gg d$ kan vi regne som om planene er uendelige. Fluksen må regnes ut gjennom en flate som omsluttes av strømsløyfa bestående av en kilde, kabelen og en last. Vi får $L = \Phi/I = 2B_0 ld/I = \mu_0 J_s ld/(J_s a) = \mu_0 ld/a$, dvs.

$$L' = \mu_0 d/a. \tag{10}$$

Oppgave 3

a) Vi skriver først om til integralform. For en lukket flate S som omslutter volumet v gir divergensteoremet at

$$\oint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_v \nabla \cdot \vec{J} \mathrm{d}v = -\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}v, \tag{11}$$

der den siste overgangen er et resultat av den oppgitte likningen. Ved å bytte om rekkefølgen av tidsderivasjon og integrasjon (anta at v er et fast volum) fås

$$\oint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{12}$$

der $Q = \int_v \rho \mathrm{d}v$ er den totale ladningen begrenset av S. Med andre ord: Netto strøm ut av S går på bekostning av ladningen innenfor S. Forsåvidt kunne vi sagt dette direkte ut fra den oppgitte, lokale versjonen av (12).

b) Ta divergensen til Amperes generaliserte lov (på differensialform); bruk at divergensen til en curl er null, og substituer Gauss lov på differensialform.

Oppgave 4

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				x
b)				x
c)	x			
d)		x		
e)	x			