Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme, august 2007

Oppgave 1

a) Poisson's ligning gir

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \tag{1}$$

med generell løsning

$$V(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon} + C_1 x + C_2. \tag{2}$$

Ved bruk av grensebetingelsene får vi

$$V(0) = C_2 = V_0, \tag{3}$$
$$V(d) = -\frac{\rho d^2}{2\epsilon} + C_1 d + C_2 = 0. \tag{4}$$

Altså

$$C_2 = V_0, \tag{5}$$
$$C_1 = \frac{\rho d}{2\epsilon} - \frac{V_0}{d}, \tag{6}$$

så

$$V(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon} + \left(\frac{\rho d}{2\epsilon} - \frac{V_0}{d}\right) x + V_0, \text{ for } 0 \leq x \leq d. \tag{7}$$

b) - Dimensjonsanalyse, sjekk at leddene $\frac{\rho x^2}{2\epsilon}$, $\frac{\rho d}{2\epsilon}x$ og $\frac{V_0}{d}x$ har dimensjon volt. Dette sees f.eks. ved å sammenlikne med Poisson's likning.

- Sjekk at $V(0) = V_0$ og $V(d) = 0$.

- Finn den dobbeltderiverte av løsningen $V(x)$, og sammenlikn med $-\rho/\epsilon$.

- Sett $\rho = 0$, og sammenlikn med potensialet for en vanlig parallellplatekondensator.

c) Det absolutte minimumet må enten finnes der $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 0$, eller på randa ($x = 0$ eller $x = d$). Finner et eventuelt punkt x_m der $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 0$:

$$-\frac{\rho x_m}{\epsilon} + \left(\frac{\rho d}{2\epsilon} - \frac{V_0}{d}\right) = 0 \tag{8}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_m = \left(\frac{\rho d}{2\epsilon} - \frac{V_0}{d}\right)\frac{\epsilon}{\rho} = \frac{d}{2} - \frac{V_0\epsilon}{\rho d}. \tag{9}$$

I dette punktet er

$$V(x_m) = \frac{V_0}{2} + \frac{\rho d^2}{8\epsilon} + \frac{\epsilon V_0^2}{2\rho d^2}. \tag{10}$$

Dette er altså et absolutt minimum dersom $V(x_m) < 0$. Hvis ikke, er det absolutte minimum for $x = d$, med tilhørende potensial $V(d) = 0$. Det minimale potensialet er altså:

$$V_{\min} = \min\left\{0, \frac{V_0}{2} + \frac{\rho d^2}{8\epsilon} + \frac{\epsilon V_0^2}{2\rho d^2}\right\}. \tag{11}$$

d) Generelt har vi $\vec{E} = -\nabla V$, men siden $V = V(x)$ reduseres ligningen til

$$\vec{E}(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\vec{u}_x = \left[\frac{\rho x}{\epsilon} - \left(\frac{\rho d}{2\epsilon} - \frac{V_0}{d}\right)\right]\vec{u}_x. \tag{12}$$

e) Elektronet må, når det skytes inn, ha en kinetisk energi større enn det arbeid som må utføres for at elektronet skal nå frem til minium av $V(x)$. Straks elektronet passerer dette punktet, vil den elektrostatiske kraften virke i positiv x-retning.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \geq -e\left(V_{\min} - V_0\right) = e\left(V_0 - V_{\min}\right). \tag{13}$$

Løses dette med hensyn på v_0, får vi

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2e\left(V_0 - V_{\min}\right)}{m}}, \tag{14}$$

der $V_{\min}$ er gitt av (11).

f) Her skulle det vært spesifisert at vi er ute etter potensialet $V(x)$. Siden $\epsilon(x)$ ikke lenger er konstant (inhomogent medium), gjelder ikke Poissons likning. Vi kan imidlertid utlede en liknende sammenheng (her bare i en dimensjon siden ingenting avhenger av y og z):

$$\rho = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\epsilon E)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}(\epsilon \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x}. \tag{15}$$

Ved å integrere en gang, dele på ϵ og integrere en gang til, finner vi et uttrykk for $V(x)$, inklusive to konstanter. Disse finnes ved å sette $V(0) = V_0$ og $V(d) = 0$.

Oppgave 2

a) Vha. symmetrien gir Amperes lov

$$\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H 2\pi a = N_1 I_1 \tag{16}$$

på en sirkulær integrasjonssløyfe C i sentrum av toroiden. Altså

$$\vec{H} = \frac{N_1 I_1}{2\pi a} \vec{u}_\phi, \tag{17}$$

der enhetsvektoren $\vec{u}_\phi$ peker langs C.

b) Selvinduktans:

$$L_1 = \frac{N_1 B \pi b^2}{I_1} = \frac{\mu \pi b^2 N_1^2}{2\pi a} \tag{18}$$

$$L_2 = \frac{\mu \pi b^2 N_2^2}{2\pi a} \tag{19}$$

Gjensidig induktans:

$$L_{12} = -\frac{N_2 B \pi b^2}{I_1} = -\frac{\mu \pi b^2 N_1 N_2}{2\pi a} \tag{20}$$

(Fortegnet er et resultat av definisjonen av strømretningene på figuren.)

c) Lagret magnetisk energi:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + L_{12} I_1 I_2, \tag{21}$$

der L_1, L_2 og L_{12} er gitt ovenfor. Når $N_1 = N_2$, blir $L_1 = L_2 = L_{12}$. Kaller denne størrelsen L. Når $|I_1| = |I_2| = I$ blir da

$$W_m = LI^2 \pm LI^2, \tag{22}$$

dvs. mulige verdier er 0 og $2LI^2$. Den første verdien fås når strømmene "drar hver sin vei" ($I_1 = I_2$), slik at feltet i toroiden blir null. Den andre verdien fås når de "drar i samme retning" ($I_1 = -I_2$) slik at totalfelt blir fordoblet i forhold til resultatet i a).

Oppgave 3

a) Bruk at $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}$, og sett inn for Faradays lov og den generaliserte Amperes lov. Bruk at $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ og $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

b) Multipliser begge sider av likningen med volumelementet dv. Høyresiden av uttrykket er minkningen av lagret elektromagnetisk energi i dv. Da må venstre side representere hva denne energien går til. Det andre leddet kjenner vi igjen som Joulsk effekttap (effekttap pga resistans). Dvs. $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})\mathrm{d}v$ må være annet effekttap, mao. energi som strømmer vekk fra dv. Altså: $\vec{E} \times \vec{H}$ er effektstrømtetthet, dvs. effektstrøm per arealenhet. (Denne vektoren kalles forøvrig Poyntings vektor.)

Oppgave 4

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)			x	
b)			x	
c)		x		
d)			x	
e)			x	