# Løsningsforslag
# TFE4120 Elektromagnetisme 30. mai 2006

## Oppgave 1

a) Med kulesymmetrisk ladningsfordeling må $\vec{E}$ og $\vec{D}$ overalt være radielt rettet, og kun avhengig av avstanden $r$ fra kuleskallets sentrum. Med dielektrikum til stede bestemmes først $D(r)$ i området $a < r < b$ ved hjelp av Gauss' lov (Kuleskall med radius $r$ som Gaussflate, total fri ladning innenfor dette kuleskallet er $Q$).

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q. \tag{1}$$

Det elektriske feltet i sjiktet mellom lederne er dermed

$$E(r) = \frac{D(r)}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}. \tag{2}$$

Potensialforskjellen mellom lederne blir

$$V = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{Q(b-a)}{4\pi\epsilon ab}. \tag{3}$$

Kapasitansen blir derfor

$$\underline{\underline{C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon ab}{(b-a)}}}. \tag{4}$$

b) Dersom det dielektriske sjiktet er veldig tynt, har vi $a \simeq b$, og tilnærmet samme areal $A \simeq 4\pi ab \simeq 4\pi a^2 \simeq 4\pi b^2$ på de to lederne. Dermed, med $d = b - a$ =avstanden mellom lederne, får vi

$$C \simeq \epsilon\frac{A}{d}, \tag{5}$$

dvs. som for en parallellplatekondensator.

c) Det elektriske feltet er ifølge a)

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r = \frac{CV}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r, \tag{6}$$

for $a < r < b$. For $r < a$ og $r > b$ er $\vec{E} = 0$.

d) Energitetthet: $w_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2$.
Energi:

$$W_e = \frac{1}{2}\epsilon\int_a^b E^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{4\pi\epsilon}C^2V^2 = \frac{1}{2}CV^2. \tag{7}$$

e) Siden det fortsatt er ingen frie ladninger i området $a < r < b$ er $\vec{D}$ som før. Resultatet fås direkte ved å følge samme framgangsmåte som i a). Integralet kan tilnærmes som en sum:

$$\frac{1}{C} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{\epsilon(r)4\pi r^2} \simeq \sum_{i=1}^n \frac{\Delta r}{\epsilon(r_i)4\pi r_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{\epsilon(r_i)4\pi r_i^2}{\Delta r}}. \tag{8}$$

Her er området delt inn i $n$ kuleskall med tykkelse $\Delta r = (b-a)/\Delta r$. Tilnærmelsen blir bedre og bedre når $n$ øker. Vi ser nå at vi kan tolke kapasitansen mellom $a$ og $b$ som en seriekopling av $n$ tynne parallellplatekondensatorer med areal $4\pi r_i^2$, permittivitet $\epsilon(r_i)$ og avstand mellom "platene" lik $\Delta r$.

f) Vi antar nå en konstant strøm $I$ fra den indre til den ytre lederen. Pga. symmetri fås da $\vec{J} = I/(4\pi r^2)\vec{u}_r$, og dermed $\vec{E} = I/(4\pi\sigma r^2)\vec{u}_r$. Vha. $V = \int_a^b E\mathrm{d}r$ blir

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \tag{9}$$

Legg merke til at $\epsilon$ ikke har noen betydning.

## Oppgave 2

a) Vi kaller tverrsnittsfluksen gjennom bøylen (og ankeret) $\Phi$. Siden $\mu$ kan regnes uendelig, er magnetfeltet i bøylen og ankeret $\vec{H} \simeq 0$. I luftgapet er $H \simeq \Phi/(\mu_0 a^2)$. Amperes lov gir dermed

$$\frac{\Phi}{\mu_0 a^2}d + \frac{\Phi}{\mu_0 a^2}d = N_1 I_1 + N_2 I_2, \tag{10}$$

dvs.

$$\Phi = \frac{\mu_0 a^2}{2d}(N_1 I_1 + N_2 I_2). \tag{11}$$

b) Når man skal beregne induktansene må man passe på å bruke rette flukser. Selvinduktansen i spole 1 finnes ved å beregne den totale fluksen i spole 1 pga. strømmen $I_1$. Denne fluksen er altså $\Phi_{11} = N_1 \cdot \frac{\mu_0 a^2 N_1 I_1}{2d}$. Tilsvarende for de andre induktansene. Dette gir

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \frac{\mu_0 a^2 N_1^2}{2d}, \tag{12}$$

$$L_2 = \frac{\Phi_{22}}{I_2} = \frac{\mu_0 a^2 N_2^2}{2d}, \tag{13}$$

og

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 a^2 N_1 N_2}{2d}. \tag{14}$$

c) Kraft: $\vec{F} = +\nabla W_m$, siden strømmene er konstant. Energien finnes enten ved å integrere den magnetiske energitettheten (over luftgapene), eller vha.

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + L_{12} I_1 I_2. \tag{15}$$

Dvs.

$$F = \frac{\partial W_m}{\partial d} = -\frac{\mu_0 a^2}{4d^2}(N_1^2 I_1^2 + N_2^2 I_2^2 + 2N_1 N_2 I_1 I_2) = -\frac{\mu_0 a^2}{4d^2}(N_1 I_1 + N_2 I_2)^2. \tag{16}$$

Fortegnet viser at kraften virker i retning av minkende $d$, dvs. en tiltrekkende kraft.

d) Den induserte elektromotoriske spenning er gitt av

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t} = -L_{12}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -L_{12}I_0\omega\cos(\omega t) = -\frac{\mu_0 a^2 N_1 N_2}{2d}I_0\omega\cos(\omega t). \qquad (17)$$

e) Den totale fluksen i spole 2 er ifølge a)

$$\Phi_2 = N_2\frac{\mu_0 a^2}{2d}N_1 I_1. \qquad (18)$$

Dvs.

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}d}\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 a^2}{2d^2}N_1 N_2 I_1 d_1\omega\cos(\omega t). \qquad (19)$$

Vha. det oppgitte uttrykket for $d$ kan dette også skrives

$$e = \frac{\mu_0 a^2}{2(d_0 + d_1\sin(\omega t))^2}N_1 N_2 I_1 d_1\omega\cos(\omega t) \simeq \frac{\mu_0 a^2}{2d_0^2}N_1 N_2 I_1 d_1\omega\cos(\omega t), \qquad (20)$$

der tilnærmelsen gjelder siden $d_1 \ll d_0$.

## Oppgave 4

| Spørsmål | Alt. i) | Alt. ii) | Alt. iii) | Alt. iv) |
|---|---|---|---|---|
| a) | | x | | |
| b) | | x | | |
| c) | x | | | |
| d) | | | | x |
| e) | x | | | |