Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme, august 2006

Oppgave 1

a) Av symmetrigrunner må det elektriske feltet være radielt rettet og uavhengig av ϕ, $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. Vi lar S være overflaten til en sylinder med radius r og lengde l. Ladningen per lengdeenhet på innerlederen kaller vi Q'. Gauss' lov gir:

$$\oint_S \epsilon \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi r l \epsilon E(r) = Q_{\text{innenfor } S} = \begin{cases} Q'l, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{1}$$

dvs

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi\epsilon r}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{2}$$

Vi finner Q' ved bruk av definisjonen av potensial:

$$V(a) - V(b) = V_0 - 0 = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q'}{2\pi\epsilon} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}. \tag{3}$$

Altså får vi

$$Q' = \frac{2\pi\epsilon V_0}{\ln \frac{b}{a}}. \tag{4}$$

Innsatt i (2) gir dette

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r = \begin{cases} \frac{V_0}{r \ln \frac{b}{a}} \vec{u}_r, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{5}$$

Det går også an å bruke Gauss' lov på differensialform, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, eller Poissons likning $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$ til å finne $\vec{E}$. Differensialoperatorene uttrykkes da i sylinderkoordinater, og man må bruke at $\rho = 0$ i det dielektriske mediet mellom lederne.

b) Potensial:

$$V(r) = \int_r^b E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} V_0, & \text{for } r < a \\ V_0 \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{for } r > b. \end{cases} \tag{6}$$

c) Kapasitans per lengdeenhet:

$$C' = \frac{Q'}{V(a) - V(b)} = \frac{Q'}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}. \tag{7}$$

d) Av symmetrigrunner er strømtettheten $\vec{J} = (I/2\pi r l)\vec{u}_r$, der I er den totale strømmen. Det elektriske feltet er $\vec{E} = \vec{J}/\sigma$. V_0 finnes ved å integrere det elektriske feltet fra innerleder til ytterleder. Dette gir:

$$R = V_0/I = \begin{cases} \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi\sigma_0 l}, & \text{for } k = 0 \\ \frac{a^{-k} - b^{-k}}{2\pi\sigma_k k l}, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{8}$$

e) Når mediet mellom lederne også er ledende, er det ingen grunn til å tro at feltet blir det samme som i a). Dette er fordi mediet nå kan inneholde fri ladningstetthet. Man kan vise at påstanden er gal f.eks. ved å regne ut det korrekte feltet:

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi\sigma rl}\vec{u}_r = \frac{V_0}{2\pi\sigma rlR}\vec{u}_r, \tag{9}$$

der R er gitt i svaret på forrige deloppgave. Vi finner at resultatet avhenger av formen på σ og ikke av ϵ (unntatt for $k = 0$; da avhenger feltet verken av σ eller ϵ).

Evt. kan vi ta resultatet fra a) og vise at det ikke medfører ladningsbevarelse. Gjennom en sylinder med radius r ville det gått strømmen $I = 2\pi rl\sigma E = 2\pi rl\sigma_k r^k \frac{V_0}{r\ln(b/a)}$. Dette gir en r-avhengig strøm (unntatt for $k = 0$). Det kan vi ikke ha når strømmen er uavhengig av tiden - det ville enten betydd brudd på ladningsbevarelse, eller at det fantes uendelig mye ladning som kunne hope seg opp i mediet mellom lederne.

Oppgave 2

a) Newtons 2. lov på en av de negative punktladningene gir (ser bare på x-komponenten):

$$-qE(t) = m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}. \tag{10}$$

Merk fortegnet. Ved å sette inn $E(t) = E_0\cos(\omega t)$ og integrere to ganger får vi det oppgitte resultatet.

b) Den negative ladningen har posisjonen $x(t)$ mens den positive har posisjonen 0. Dipolmomentet blir derfor

$$\vec{p}(t) = -qx(t)\vec{u}_x = -\frac{q^2E_0}{m\omega^2}\cos(\omega t)\vec{u}_x. \tag{11}$$

Polariseringstettheten er dipolmoment per volumenhet:

$$\vec{P}(t) = N\vec{p}(t) = -\frac{Nq^2E_0}{m\omega^2}\cos(\omega t)\vec{u}_x = -\frac{Nq^2\vec{E}(t)}{m\omega^2} \tag{12}$$

c) Vi bruker at $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E} = \epsilon_0(\epsilon_\mathrm{r} - 1)\vec{E}$ og får vha. (12) det oppgitte resultatet.

Oppgave 3

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				x
b)		x		
c)			x	
d)				x
e)				x
f)				x