Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme 31. mai 2005

Oppgave 1

a) Av symmetrigrunner må det elektriske feltet være radielt rettet og uavhengig av ϕ, $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. Vi lar S være overflaten til en sylinder med radius r og lengde l. Ladningen per lengdeenhet på innerlederen kaller vi Q'. Gauss' lov gir:

$$\oint_S \epsilon \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi r l \epsilon E(r) = Q_{\text{innenfor } S} = \begin{cases} Q'l, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{1}$$

dvs

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi\epsilon r}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{2}$$

Vi finner Q' ved bruk av definisjonen av potensial:

$$V(a) - V(b) = V_0 - 0 = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q'}{2\pi\epsilon}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon}\ln\frac{b}{a}. \tag{3}$$

Altså får vi

$$Q' = \frac{2\pi\epsilon V_0}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{4}$$

Innsatt i (2) gir dette

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r = \begin{cases} \frac{V_0}{r\ln\frac{b}{a}}\vec{u}_r, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{5}$$

Det går også an å bruke Gauss' lov på differensialform, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, eller Poissons likning $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$ til å finne $\vec{E}$. Differensialoperatorene uttrykkes da i sylinderkoordinater, og man må bruke at $\rho = 0$ i det dielektriske mediet mellom lederne.

b) Potensial:

$$V(r) = \int_r^b E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} V_0, & \text{for } r < a \\ V_0\frac{\ln\frac{b}{r}}{\ln\frac{b}{a}}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{for } r > b. \end{cases} \tag{6}$$

c) Kapasitans per lengdeenhet:

$$C' = \frac{Q'}{V(a) - V(b)} = \frac{Q'}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{7}$$

d) Av symmetrigrunner er fortsatt V kun avhengig av r. Poissons likning $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon$ i sylinderkoordinater gir derfor

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\rho r}{\epsilon}, \tag{8}$$

for $a < r < b$. Denne likningen løses ved å integrere en gang, dividere med r, og integrere en gang til. Utrykket man da får, inneholder to integrasjonskonstanter. Disse finner man vha. grensebetingelsene $V(a) = V_0$ og $V(b) = 0$. For $r \leq a$ er $V(r) = V_0$ (ideell leder), og for $r \geq b$ er $V(r) = 0$ (både i og utenfor ytterlederen er potensialet konstant siden områdene er feltfrie).

Svaret kan kontrolleres ved følgende metoder:

- Skjekk løsningen ved å regne ut $\nabla^2 V$ og se om det gir $-\rho/\epsilon$. Grensebetingelsene skjekkes ved å regne ut $V(a)$ og $V(b)$.
- Bruk Gauss' lov i stedet for Poissons likning til å regne ut V.
- Skjekk at når $\rho \to 0$ fås et resultat konsistent med svaret i b).
- Skjekk at dimensjonene i alle ledd er den samme som f.eks. for potensialet pga. en punktladning.

De to første kontrollene er fullstendige, mens de to siste er delvise. I dette tilfellet er det naturlig å utføre alle kontrollene bortsettfra den andre (som krever litt mye regning).

e) Flateladningstettheten på innerlederen er $\sigma_a = \epsilon E(a)$. Siden $E(r) = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$, får vi

$$\sigma_a = \frac{\rho a}{2} + \frac{\epsilon V_1}{a}. \tag{9}$$

Ladningen per lengdeenhet av kabelen blir derfor

$$Q'_a = 2\pi a \sigma_a = \pi\rho a^2 + 2\pi\epsilon V_1. \tag{10}$$

Tilsvarende får vi (pass på fortegnet!)

$$Q'_b = -\pi\rho b^2 - 2\pi\epsilon V_1. \tag{11}$$

Total ladning per lengdeenhet blir derfor

$$Q'_a + Q'_b + \int_a^b \rho 2\pi r \mathrm{d}r = -\pi\rho(b^2 - a^2) + \pi\rho(b^2 - a^2) = 0. \tag{12}$$

Oppgave 2

a) Tilnærmelsen som gjelder for lange og tynne solenoider, er å neglisjere feltet utenfor solenoiden. Amperes lov gir da $Hl = NI_1$ og dermed

$$B = \frac{\mu_0 N I_1}{l}. \tag{13}$$

Hvis positiv strømretning er som angitt i figuren, er retningen til $\vec{B}$ mot venstre.

b) Selvinduktans:

$$L_1 = \frac{N\Phi_1}{I_1} = \frac{\pi\mu_0 b^2 N^2}{l}. \tag{14}$$

c) Gjensidig induktans:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\pi \mu_0 a^2 N}{l} \sin \varphi. \tag{15}$$

Faktoren $\sin \varphi$ kommer fra det faktum at flatenormalen til sløyfa danner $\pi/2 - \varphi$ med $\vec{B}$-feltet.

d) Vi har at $\vec{M}_F = \vec{m} \times \vec{B}$, der $\vec{m} = I_2 \vec{S}_2$. Her er $\vec{S}_2$ flaten som begrenses av sløyfa (inklusive flatenormal). Dette gir

$$M_F = \pi a^2 I_2 \cdot \frac{\mu_0 N I_1}{l} \cdot \cos \phi, \tag{16}$$

med retning ut av papirplanet. Dette gir en dreining av sløyfa mot klokka, inntil $\phi = \pi/2$, som er en stabil tilstand.

e) Den induserte elektromotoriske spenning er gitt av

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi \mu_0 a^2 \omega N I_1}{l} \cos(\omega t). \tag{17}$$

f) Fluksen gjennom en superledende sløyfe er konstant. Ved $t = 0$ er fluksen lik null, altså er konstanten lik null:

$$L_{12} I_1 + L_2 I_2 = 0, \tag{18}$$

som gir

$$I_2 = -\frac{L_{12}}{L_2} I_1 = -\frac{\pi \mu_0 a^2 N I_1}{l L_2} \sin(\omega t). \tag{19}$$

Oppgave 4

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)			x	
b)			x	
c)			x	
d)			x	
e)			x	