Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme 15. august 2005

Oppgave 1

a) Av symmetrigrunner må det elektriske feltet være radielt rettet og uavhengig av ϕ, $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. Vi lar S være overflaten til en sylinder med radius r og lengde l. Ladningen per lengdeenhet på innerlederen kaller vi Q'. Gauss' lov gir:

$$\oint_S \epsilon \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi r l \epsilon E(r) = Q_{\text{innenfor } S} = \begin{cases} Q'l, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{1}$$

dvs

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi\epsilon r}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{2}$$

Vi finner Q' ved bruk av definisjonen av potensial:

$$V(a) - V(b) = V_0 - 0 = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q'}{2\pi\epsilon}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon}\ln\frac{b}{a}. \tag{3}$$

Altså får vi

$$Q' = \frac{2\pi\epsilon V_0}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{4}$$

Innsatt i (2) gir dette

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r = \begin{cases} \frac{V_0}{r\ln\frac{b}{a}}\vec{u}_r, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{5}$$

Det går også an å bruke Gauss' lov på differensialform, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, eller Poissons likning $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$ til å finne $\vec{E}$. Differensialoperatorene uttrykkes da i sylinderkoordinater, og man må bruke at $\rho = 0$ i det dielektriske mediet mellom lederne.

b) Potensial:

$$V(r) = \int_r^b E(r)\mathrm{d}r = \begin{cases} V_0, & \text{for } r < a \\ V_0\frac{\ln\frac{b}{r}}{\ln\frac{b}{a}}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{for } r > b. \end{cases} \tag{6}$$

c) Kapasitans per lengdeenhet:

$$C' = \frac{Q'}{V(a) - V(b)} = \frac{Q'}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{7}$$

d) Av symmetrigrunner er strømtettheten $\vec{J} = (I/2\pi rl)\vec{u}_r$, der I er den totale strømmen. Det elektriske feltet er $\vec{E} = \vec{J}/\sigma$. Konstanten I finnes ved å integrere $\vec{E}$ fra innerleder til ytterleder, og sammenlikne med V_0. Siden $\vec{E} \propto 1/r$, blir resultatet som i a):

$$\vec{E} = \frac{V_0}{r \ln \frac{b}{a}} \vec{u}_r, \tag{8}$$

for $a < r < b$. Resistansen blir

$$R = V_0/I = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi\sigma l}. \tag{9}$$

e) Symmetrien gjelder fortsatt, så vi kan uttrykke det elektriske feltet som $\vec{E} = (I/2\pi\sigma rl)\vec{u}_r = (I/2\pi kl)\vec{u}_r$. Dette gir

$$\vec{E} = \frac{V_0}{b - a} \vec{u}_r, \tag{10}$$

og dermed

$$\rho = \nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon V_0}{r(b - a)} \tag{11}$$

for $a < r < b$. Det fins også frie ladninger på lederne. Flateladningstettheten på henholdsvis innerleder og innsiden av ytterlederen er

$$\sigma_a = \epsilon E(a) = \frac{\epsilon V_0}{b - a} \tag{12}$$

og

$$\sigma_b = -\epsilon E(b) = -\frac{\epsilon V_0}{b - a}. \tag{13}$$

For $r < a$ og $r > b$ er den frie ladningstettheten 0. En rask sjekk gir $\sigma_a 2\pi a + \sigma_b 2\pi b + \int_a^b \rho 2\pi r \mathrm{d}r = 0$.
(Det er forøvrig interessant å merke seg at kontinuteten av strøm gir i dette tilfellet et elektrisk felt som er uavhengig av r. Dersom det bare hadde vært ladning på inner- og ytterleder, hadde det elektriske feltet pga. Gauss' lov vært proposjonalt med $1/r$. Siden både Gauss' lov og ladningsbevarelse (her: kontinuitet av strøm) må gjelde samtidig, blir det en inhomogen ladningstetthet mellom lederne.)

Oppgave 2

a) Siden $\mu_r >> 1$, kan vi anta at fluksen følger toroiden. Siden toroiden er tynn antar vi at $\vec{B}$-feltet (og dermed $\vec{H}$-feltet) er tilnærmet uniformt over tverrsnittet.

Amperes lov anvendt på en sirkulær integrasjonskurve i midten av toroiden gir (pga symmetri):

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H 2\pi a = N_1 I_1, \tag{14}$$

dvs.

$$H = \frac{N_1 I_1}{2\pi a}, \tag{15}$$

med retning slik at $\vec{H}$ sirkulerer mot klokka i toroiden.

b) Selvinduktans:

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi}{I_1} = \frac{\mu b^2 N_1^2}{2a}. \tag{16}$$

c) Generelt uttrykk for energitetthet i et magnetisk felt:

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}, \tag{17}$$

evt.

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2\mu} B^2. \tag{18}$$

Total magnetisk energi:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu N_1^2 I_1^2}{(2\pi a)^2} \pi b^2 2\pi a = \frac{1}{4} \frac{\mu b^2 N_1^2 I_1^2}{a}. \tag{19}$$

Som en sjekk ser vi at dette er lik $\frac{1}{2} L_1 I_1^2$.

d) Siden vi ikke kan ha uendelig energitetthet, må $\vec{H} = 0$. Dermed gir Amperes lov at $0 = N_1 I_1 - N_2 I_2$ (merk fortegnene pga. definisjonen av positive strømretninger i figuren).

e) Amperes lov gir $N_1 I_1 - N_2 I_2 = H 2\pi a = \frac{\Phi}{\mu \pi b^2} 2\pi a$. Strømmen I_2 er gitt av $I_2 = e_2 / R$, der emf'en $e_2 = -N_2 \mathrm{d}\Phi / \mathrm{d}t$. Dette gir

$$N_1 I_1 + \frac{N_2^2}{R} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{2a\Phi}{\mu b^2}. \tag{20}$$

Siden mediet er lineært, vil Φ variere harmonisk med frekvens ω. Visermetoden kan dermed brukes til å løse differensiallikningen ovenfor (hatter betyr visere):

$$N_1 \hat{I}_1 + j\omega \frac{N_2^2}{R} \hat{\Phi} = \frac{2a\hat{\Phi}}{\mu b^2}, \tag{21}$$

og dermed

$$\hat{\Phi} = \frac{N_1 \hat{I}_1}{\frac{2a}{\mu b^2} - \frac{j\omega N_2^2}{R}}. \tag{22}$$

Vi får altså følgende sammenheng mellom strøm ut og strøm inn (visere):

$$\hat{I}_2 = -N_2 \frac{j\omega \hat{\Phi}}{R} = \frac{N_1 \hat{I}_1 / N_2}{1 - \frac{2aR}{j\omega \mu b^2 N_2^2}}. \tag{23}$$

Resultatet i forrige spørsmål er altså nøyaktig forutsatt at $\frac{2aR}{\omega \mu b^2 N_2^2} \ll 1$.

Oppgave 3

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)			x	
b)			x	
c)				x
d)	x			
e)		x		