Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme 13. mai 2004

Oppgave 1

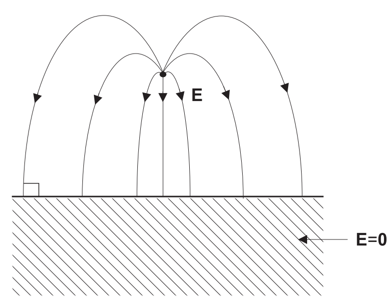
a) Speilladningsmetoden gir at potensialet for $z > 0$ er summen av potensialet pga ladningen Q i posisjon $z = h$ og potensialet pga en speillanding $-Q$ i posisjon $z = -h$. Siden planet antas å være en ideell leder, må potensialet for $z < 0$ være en konstant. Med denne konstanten som referanse får vi altså:

$$V(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{h-z} - \frac{1}{h+z}\right), & 0 < z < h \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{z-h} - \frac{1}{h+z}\right), & z > h. \end{cases} \tag{1}$$

b) Den elektriske feltstyrken langs z-aksen finnes ved $\vec{E} = -\nabla V(z) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\vec{u}_z$. Ved å bruke uttrykket for $V(z)$ fra oppgave a), får vi

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{(h-z)^2} + \frac{1}{(h+z)^2}\right)\vec{u}_z, & 0 < z < h. \end{cases} \tag{2}$$

c) Skisse av det elektriske feltet:



d) Kraften på ladningen er gitt som Q multiplisert med det elektriske feltet i punktet pga "alle andre" ladninger. Det elektriske feltet i punktet er det samme enten vi ser på vårt tilfelle med en ladning over et ledende plan, eller for den tenkte speilladningssituasjonen med de to punktladningene. Altså kan Coulombs lov for kraften mellom de to punktladningene brukes direkte:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q(-Q)}{(2h)^2}\vec{u}_z = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2}\vec{u}_z. \tag{3}$$

e) Når ladningen har høyden z finner vi den elektriske kraften ved å bytte ut h med z i uttrykket ovenfor. Den mekaniske kraften vi må bruke for å balansere denne kraften er motsatt av denne. Frigjøringsarbeidet blir altså:

$$W = \int_h^\infty (-\vec{F}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_h^\infty \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 z^2}\mathrm{d}z = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 h}. \tag{4}$$

f) Vi bruker igjen speilladningsmetoden. For å oppfylle grensebetingelsene må vi nå ha enda en speilladning; en ladning $-q$ plassert i $z = -z_0$. Kraften på ladningen q finnes igjen vha Coloumbs lov:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{(z_0-h)^2}\vec{u}_z - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{(z_0+h)^2}\vec{u}_z - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(2z_0)^2}\vec{u}_z. \tag{5}$$

g) Når ladningen q er tilstrekkelig liten vil den ikke i noen særlig grad indusere flateladninger på det ledende planet. Da vil den heller ikke endre feltbildet, slik at potensialet blir som før. Dermed blir frigjøringsarbeidet $q[V(\infty) - V(z_0))] = -qV(z_0)$, der $V(z)$ er gitt i a (Arbeidet vi må utføre blir negativt siden den elektriske kraften er i positiv z-retning når q er liten, se (5)). Hvis ladningen q ikke er liten vil den indusere flateladninger i planet som igjen bidrar med en kraft på q (denne ekstra kraften er representert ved det siste leddet i (5)).
Kriterium: Det siste leddet i (5) må være mye mindre enn de to første. Dette gir

$$q \ll Q\frac{4z_0^2}{(z_0+h)^2}. \tag{6}$$

Oppgave 2

a) Da $\mu_r = \infty$, kan vi anta at fluksen følger toroiden. Videre antar vi at flukslinjene ikke spres i luftgapet. Siden toroiden er tynn antar vi at $\vec{B}$-feltet er tilnærmet uniformt over tverrsnittet slik at fluksen blir $\Phi = BS$.

Når vi skal bruke Amperes lov på en lukket integrasjonskurve langs feltlinjene (rundt den magnetiske kretsen), får vi bare bidrag fra luftgapet siden $H = \Phi/(\mu_0\mu_r S) = 0$ i materialet når $\mu_r = \infty$. Vi får derfor:

$$N_1 I_1 = \oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\Phi}{\mu_0 S}g \tag{7}$$

dvs.

$$\Phi = \frac{\mu_0 S N_1 I_1}{g}. \tag{8}$$

Selvinduktans:

$$L_1 = \frac{N_1\Phi}{I_1} = \frac{\mu_0 S N_1^2}{g}. \tag{9}$$

Merk at fluksgjennomstrømningen i spolen er $N_1\Phi$ siden det er N_1 tørn.

b) Total magnetisk energi kan finnes ved å integrere energitettheten $w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$ overalt der det finnes $\vec{B}$ og $\vec{H}$, dvs i luftgapet:

$$W_m = \int_v \frac{B^2}{2\mu_0}\mathrm{d}v = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 S^2}gS = \frac{\mu_0 S N_1^2 I_1^2}{2g}. \tag{10}$$

Vi ser direkte at dette er lik $\frac{1}{2}L_1 I_1^2$.

c) Først må vi finne fluksen gjennom spole 2 pga strømmen i spole 1, Φ_{12}:

$$\Phi_{12} = \sum_{i=1}^{N_2} \text{fluks gjennom vikling } i = \sum_{i=1}^{N_2} B\pi r_i^2, \tag{11}$$

der r_i er radius til vikling i. Siden spolen er tettviklet kan vi tilnærme summen med et integral:

$$\Phi_{12} = \frac{1}{\Delta r}\sum_{i=1}^{N_2} B\pi r_i^2 \Delta r \approx \frac{1}{\Delta r}\int_a^b B\pi r^2 \mathrm{d}r, \tag{12}$$

der $\Delta r = (b-a)/N_2$ er "tykkelsen" på en vinding. Dette gir

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\pi\mu_0 N_1 N_2}{3g}\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{\pi\mu_0 N_1 N_2}{3g}(a^2+ab+b^2). \tag{13}$$

Motsatt fortegn på L_{12} må også godtas siden positiv strømretning for spole 2 ikke er angitt.

d) Sammenhengen mellom spenningen inn og ut blir

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}\Phi_{11}}{\mathrm{d}t}} = \frac{L_{12}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}}{L_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}} = \frac{L_{12}}{L_1} = \frac{\pi(a^2+ab+b^2)}{3S}\frac{N_2}{N_1}. \tag{14}$$

Her er Φ_{11} lik fluksen igjennom spole 1 pga strømmen i spole 1. Som en test ser vi at hvis vi lar $a=b$ og setter $S=\pi b^2$ får vi $V_2/V_1 = N_2/N_1$, som vi skal ha for en ideell transformator.

Hvis vi i stedet hadde koplet generatoren til spole 2 og voltmeteret til spole 1 ville vi *ikke* fått samme resultat:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{L_{21}}{L_2} = \frac{L_{12}}{L_2}, \tag{15}$$

der vi har brukt den generelle sammenhengen $L_{12} = L_{21}$. Siden selvinduktansen til spole 2, L_2, er generelt forskjellig fra L_1, får vi ikke samme resultat (unntatt for en helt bestemt verdi av N_2 som er slik at $L_2 = L_1$).

Oppgave 3

a) Vi skriver først om til integralform. For en lukket flate S som omslutter volumet v gir divergensteoremet at

$$\oint_S \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_v \nabla\cdot\vec{J}\mathrm{d}v = -\int_v \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}v, \tag{16}$$

der den siste overgangen er et resultat av den oppgitte likningen. Ved å bytte om rekkefølgen av tidsderivasjon og integrasjon (anta at v er et fast volum) fås

$$\oint_S \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{17}$$

der $Q = \int_v \rho \mathrm{d}v$ er den totale ladningen begrenset av S. Med andre ord: Netto strøm ut av S går på bekostning av ladningen innenfor S. Forsåvidt kunne vi sagt dette direkte ut fra den oppgitte, lokale versjonen av (17).

b) Ta divergensen til Amperes generaliserte lov (på differensialform); bruk at divergensen til en curl er null, og substituer Gauss lov på differensialform.

Oppgave 4

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)		x		
b)				x
c)		x		
d)	x			
e)	x			