Løsningsforslag
SIE4010 Elektromagnetisme 6. august 2003

Oppgave 1

a) Av symmetrigrunner må det elektriske feltet være radielt rettet og uavhengig av ϕ, $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. Vi lar S være overflaten til en sylinder med radius r og lengde l. Ladningen per lengdeenhet på innerlederen kaller vi Q'. Gauss' lov gir:

$$\oint_S \epsilon\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi r l \epsilon E(r) = Q_{\text{innenfor } S} = \begin{cases} Q'l, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{1}$$

dvs

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi\epsilon r}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{2}$$

Vi finner Q' ved bruk av definisjonen av potensial:

$$V(a) - V(b) = V_0 - 0 = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q'}{2\pi\epsilon}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon}\ln\frac{b}{a}. \tag{3}$$

Altså får vi

$$Q' = \frac{2\pi\epsilon V_0}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{4}$$

Innsatt i (2) gir dette

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r = \begin{cases} \frac{V_0}{r\ln\frac{b}{a}}\vec{u}_r, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{5}$$

Det går også an å bruke Gauss' lov på differensialform, $\nabla\cdot\vec{D} = \rho$, eller Poissons likning $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$ til å finne $\vec{E}$. Differensialoperatorene uttrykkes da i sylinderkoordinater, og man må bruke at $\rho = 0$ i det dielektriske mediet mellom lederne.

b) Kapasitans per lengdeenhet:

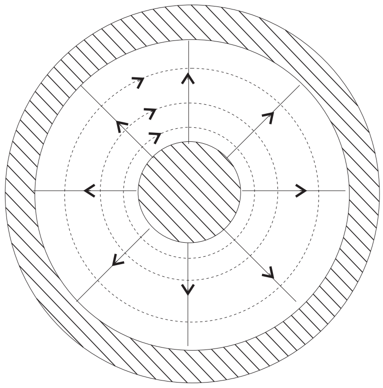
$$C' = \frac{Q'}{V(a) - V(b)} = \frac{Q'}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{6}$$

c) Av symmetrigrunner må $\vec{H}$ og $\vec{B}$ kun ha en ϕ-komponent og kun være avhengig av r, dvs. $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\phi$. ($\vec{B}$ kan ikke ha en radiell komponent fordi fluksen ut av en lukket flate (f.eks. en sylinderflate) er alltid null.) Ampères lov anvendt på en sirkulær integrasjonssløyfe med sentrum i midten av koaksialkabelen gir:

$$\oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = H2\pi r = \begin{cases} I, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{7}$$

Husk at strømmen skulle antas å gå på overflaten av innerlederen og på den indre overflaten av ytterlederen. Vi får:

$$\vec{B} = B(r)\vec{u}_\phi = \begin{cases} \frac{\mu I}{2\pi r}\vec{u}_\phi, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{8}$$



d) Selvinduktansen er definert ved

$$L = \frac{\Phi}{I} \tag{9}$$

Dersom det går en konstant strøm i kabelen, må den være lukket i begge ender (kilde og last), og Φ er fluksen som går igjennom denne lukkede sløyfa. Hvis vi antar at kabelens lengde er l, får vi

$$\Phi = l \int_a^b B \mathrm{d}r = \frac{\mu l I}{2\pi} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu l I \ln \frac{b}{a}}{2\pi}, \tag{10}$$

og dermed en induktans per lengdeenhet

$$L' = \frac{L}{l} = \frac{\Phi}{lI} = \frac{\mu \ln \frac{b}{a}}{2\pi} \tag{11}$$

e) Magnetiske feltlinjer sirkulerer rundt innerleder (stiplede). Tettest med feltlinjer innerst siden feltet er størst der. Elektriske feltlinjer radielt utover (heltrukne). Starter på overflaten av innerleder og ender på den indre overflaten av ytterleder. Skissen under gjelder dersom $V_0 > 0$.

f) Først noterer vi oss at symmetrien gir $\vec{J} = I/(2\pi r l)\vec{u}_r$ og dermed $\vec{E} = I/(2\pi\sigma r l)\vec{u}_r$. Ved å integrere fra innerleder til ytterleder og sette resultatet lik V_0 fås dermed det samme feltet som i a). Resistansen finnes fra

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{V_0}{\int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S}} = \frac{V_0}{\int_S \sigma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}, \tag{12}$$

der S er en flate rundt innerlederen. Velger S til å være en sylinderflate med radius a. Da er flatenormalen overalt parallell til $\vec{E}$, og vi får

$$R = \frac{V_0}{\sigma E(a) 2\pi a l}. \tag{13}$$

Til slutt setter vi inn $E(a)$:

$$R = \frac{V_0}{\sigma \frac{V_0}{a \ln(b/a)} 2\pi a l} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma l}. \tag{14}$$

Ser at $R = \epsilon/\sigma C' l$, der C' er kapasitans per lengdeenhet (fra b)). (Se forøvrig øving 6, oppgave 2.) Når $l \to \infty$ får vi at $R \to 0$.

Oppgave 2

a) Da $\mu_r >> 1$, kan vi anta at fluksen følger toroiden. Videre antar vi at flukslinjene ikke spres i luftgapene. Siden toroiden er tynn antar vi at $\vec{B}$-feltet er tilnærmet uniformt over tverrsnittet slik at fluksen blir $\Phi = Bb^2$.

Når vi skal bruke Amperes lov på en lukket integrasjonskurve langs feltlinjene (rundt den magnetiske kretsen), får vi bare bidrag fra luftgapene siden $H = \Phi/(\mu_0 \mu_r b^2) = 0$ i materialet når $\mu_r = \infty$. Vi får derfor:

$$NI = \oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2 \cdot \frac{\Phi}{\mu_0 b^2} g \tag{15}$$

dvs.

$$\Phi = \frac{\mu_0 b^2 NI}{2g}. \tag{16}$$

Selvinduktans:

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 b^2 N^2}{2g}. \tag{17}$$

Merk at fluksgjennomstrømningen i spolen er $N\Phi$ siden det er N tørn.

b) Total magnetisk energi kan finnes ved å integrere energitettheten $w_m = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}$ overalt der det finnes $\vec{B}$ og $\vec{H}$, dvs i luftgapene. Evt. kan vi bruke at den totale magnetiske energien er

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 b^2 N^2 I^2}{4g}. \tag{18}$$

c) Siden strømmen antas å være konstant, finnes kraften vha. $\vec{F} = \nabla W_m$. Kraften som virker i positiv "g"-retning er derfor gitt ved

$$F = \frac{\partial W_m}{\partial g} = -\frac{\mu_0 b^2 N^2 I^2}{4g^2}. \tag{19}$$

Fortegnet viser at det virker en kraft $\mu_0 b^2 N^2 I^2/(4g^2)$ i negativ "g"-retning, dvs. den prøver å redusere luftgapet. For at kraften akkurat skal balansere tyngdekraften, må $mg_g = \mu_0 b^2 N^2 I^2/(4g^2)$, der g_g er tyngdeakselerasjonen:

$$I = \sqrt{\frac{4mg_g g^2}{\mu_0 b^2 N^2}} = \frac{2g}{bN}\sqrt{\frac{mg_g}{\mu_0}}. \tag{20}$$

d) Dersom avstanden g mellom elektromagneten og bjelken fordobles, ser vi fra (20) at også strømmen må fordobles for at elektromagneten skal kunne løfte bjelken.

Oppgave 3

a) Siden $d << a$ neglisjerer vi spredefelt. Da står $\vec{E}$ rett oppover på figuren og er konstant, så vi får:

$$V = \int_{-d/2}^{d/2} E\mathrm{d}z = Ed, \tag{21}$$

som gir

$$\vec{E} = \frac{V}{d}\vec{u}_z. \tag{22}$$

b) Definisjonen gir:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma\pi a^2}{Ed} = \frac{\epsilon_0 E\pi a^2}{Ed} = \frac{\pi\epsilon_0 a^2}{d}. \tag{23}$$

Her har vi brukt at flateladningstettheten σ er lik forskyvningen $D = \epsilon_0 E$ like utenfor den ledende plata.

c) Når kondensatoren er frakoplet, går det ingen strøm fra eller til platene. Dermed kan ikke ladningen på platene endre seg. Vi finner derfor:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{\pi\epsilon_0 a^2}. \tag{24}$$

Spenningen er altså proporsjonal med avstanden d mellom platene. Ved å feste den ene kondensatorplata til en akustisk membran fås derfor en mikrofon med en utgangsspenning som varierer i takt med det akustiske signalet.

d) I oppgaven burde det vært presisert at $i(t)$ ikke varierer mye i løpet av tiden det tar for feltene å forplante seg fram til observasjonspunktet. Vi ser her igjen bort fra spredefelt, dvs. vi antar at det bare fins elektrisk felt mellom platene, og her er feltet homogent. Når vi nå skal finne det magnetiske feltet, tar vi utgangspunkt i den generaliserte Amperes lov:

$$\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{25}$$

Kildene til magnetisk felt er altså strømmen som går i tilførselsledningene og forskyvningsstrømmen som går inne i kondensatoren.

Vi ser på et observasjonspunkt med avstand $r > 0$ fra z-aksen. Alle "strømelement" inklusive forskyvningsstrømelementene er i z-retning, så det magnetiske feltet kan ikke ha en z-komponent (jfr. Biot-Savarts lov). Videre noterer vi oss at problemet er fullstendig sylindersymmetrisk, så feltet kan ikke avhenge av vinkelkoordinaten ϕ. Dermed kan heller ikke feltet ha en r-komponent fordi det ville ha ført til en utstrømning (evt. innstrømning) av $\vec{B}$-fluks i et sylindrisk volum med sentrum i z-aksen (umulig pga $\nabla \cdot \vec{B} = 0$).

Vi har altså stadfestet at $\vec{H} = H_\phi \vec{u}_\phi$, der H_ϕ bare er avhengig av r (og tiden). Vi lar integrasjonskurven i (25) være en sirkel med radius r og sentrum i z-aksen. Når integrasjonskurven ligger i et av områdene med $|z| > d/2$, finner vi at høyresiden av

(25) blir $i(t)$ siden $\vec{E}$ og dermed $\vec{D}$ er null her. For $|z| < d/2$ får vi at høyresiden blir $\int_S \partial\vec{D}/\partial t \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \pi r^2 \partial D/\partial t = \pi r^2 \partial\sigma/\partial t = \pi r^2 \partial(Q/\pi a^2)/\partial t = r^2/a^2 \partial Q/\partial t = (r/a)^2 i(t)$ for $r < a$ og $i(t)$ for $r \geq a$.

Vi får derfor:

$$H_\phi 2\pi r = \begin{cases} i(t), & \text{for } |z| > d/2 \text{ og } r > 0 \\ i(t), & \text{for } |z| < d/2 \text{ og } r \geq a \\ \frac{r^2}{a^2} i(t), & \text{for } |z| < d/2 \text{ og } r < a, \end{cases} \tag{26}$$

og dermed

$$\vec{H} = \begin{cases} \frac{i(t)}{2\pi r}\vec{u}_\phi, & \text{for } |z| > d/2 \text{ og } r > 0 \\ \frac{i(t)}{2\pi r}\vec{u}_\phi, & \text{for } |z| < d/2 \text{ og } r \geq a \\ \frac{r}{2\pi a^2} i(t)\vec{u}_\phi, & \text{for } |z| < d/2 \text{ og } r < a. \end{cases} \tag{27}$$

Oppgave 4

Kommentar til f): Faradays lov gir at $\partial\vec{B}/\partial t = -\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \nabla \times \vec{C}$. Når $\vec{C}$ er slik at $\nabla \times \nabla \times \vec{C} \neq 0$, har vi altså en $\partial\vec{B}/\partial t$ som er konstant og forskjellig fra null i tidsintervallet T. Dette kan ikke vare evig, for da ville $|\vec{B}|$ blitt uendelig, dvs. da er rett svar alternativ iii). Oppgaven er dårlig, for $\vec{C}$ kan også være slik at $\nabla \times \nabla \times \vec{C} = 0$, og da er både alternativ i) og ii) mulige, og alternativ iii) feil.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)	x			
b)	x			
c)				x
d)				x
e)				x
f)				
g)		x		