Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektroniske systemer

Faglærer:
Johannes Skaar

EKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

Mandag 29. mai 2017

Alle vanlige deloppgaver teller 4 poeng, unntatt 2a som teller 8 poeng. For flervalgsoppgaven er det egne regler som angitt. Maks poengsum er 59.

Oppgave 1

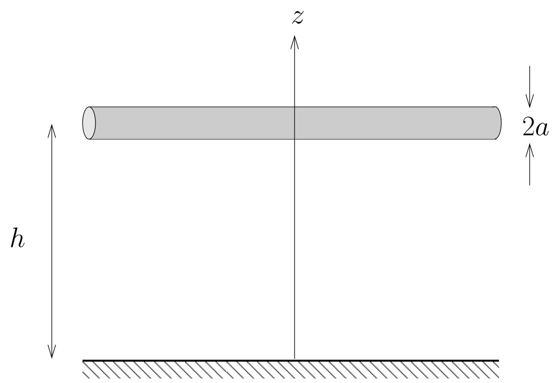
a) En sylindrisk, uendelig lang, ideell leder har radius a og linjeladningstetthet Q'. Det er vakuum overalt rundt lederen. Finn det elektriske feltet overalt.

I resten av oppgaven er den sylindriske lederen fra deloppgave a) en høyspentlinje som henger i en høyde h parallelt med bakken, se fig. 1. Vi ser bort fra de andre lederne i høyspentlinja, og ser også bort fra mastene.

b) Vi antar at $a \ll h$ så ladningsfordelingen på lederen er sylindersymmetrisk. Bakken anser vi som en ideell leder, og antas å være flat. Vis at potensialet langs z-aksen er

$$V(z) = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h+z}{h-z} \tag{1}$$

for $0 \leq z \leq h - a$, når referansen settes i $z = 0$. (Hint: Bruk speilladningsmetoden til å finne det elektriske feltet først. Finn deretter potensialet.)



Figur 1: En sylindrisk leder med radius a henger h over bakken.

c) Anta at lederen har potensialet V_0. Vis at

$$V(z) = \begin{cases} 0 & \text{for } z \leq 0, \\ \frac{V_0}{\ln \frac{2h}{a}} \ln \frac{h+z}{h-z} & \text{for } 0 < z < h-a, \\ V_0 & \text{for } h-a \leq z \leq h+a, \end{cases} \tag{2}$$

der vi har brukt at $a \ll h$. Anta $V_0 = 420\,\text{kV}$, $h = 10\,\text{m}$ og $a = 3\,\text{cm}$. Hva er potensialet rett under lederen i en høyde 2 m over bakken? Kall det V_1.

d) Størker Støt befinner seg rett under høyspentlederen med føttene godt plantet på jorda. Størker er 2 m høy. Hva blir potensialet på hodet hans?

e) Et langt metallrør henger 2 m over bakken, parallelt og rett under høyspentlederen. Røret er ikke koplet til noen ting, og er isolert fra bakken. Røret er tynt sammenlignet med høyden over bakken, og er netto uladet. Forklar hvorfor røret vil få potensialet V_1 fra deloppgave c). Forklar i detalj hva som skjer hvis Størker kommer borti røret mens føttene er godt plantet på jorda. Vil størrelsen på metallrøret ha noe å si?

f) En løsning på problemet i forrige deloppgave er å jorde røret. Røret jordes i den ene enden men ikke den andre. Røret er 10 km langt og går langs kraftlinja. Kraftlinja fører en vekselstrøm med amplitude 1000 A og frekvens 50 Hz. Kan det være farlig å ta på røret på den åpne enden? Forklar, og gjør et grovt overslag over spenningen mellom den åpne enden og jorda. Hint: Induksjon.

Kommentar: I hele denne oppgaven har vi bare sett på virkningen fra den ene høyspentlinje-lederen. I virkeligheten vil linja bestå av tre ledere (trefasesystem), noe som vil redusere effekten av både den kapasitive og induktive koplingen.

Oppgave 2

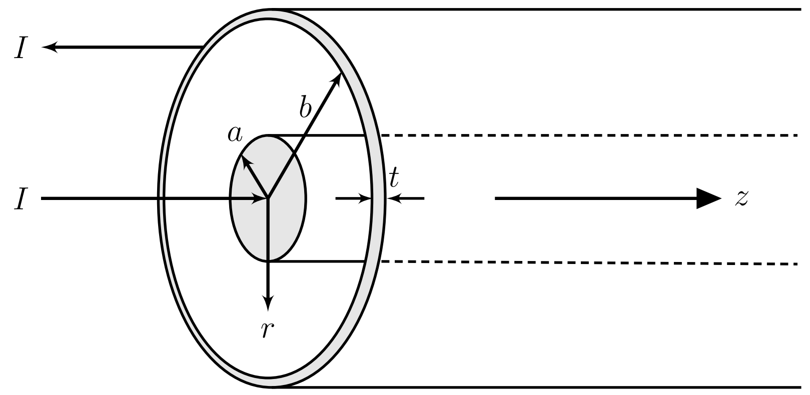
Gitt en koaksialkabel hvor radius på innerlederen er a og indre radius på ytterlederen er b, se fig. 2. Ytterlederens tykkelse er t. Alle materialer er umagnetiske, dvs. $\mu = \mu_0$ overalt.

Strømmen I antas jevnt fordelt over innerlederens tverrsnittsareal, og returstrømmen I antas jevnt fordelt over ytterlederens tverrsnittsareal.

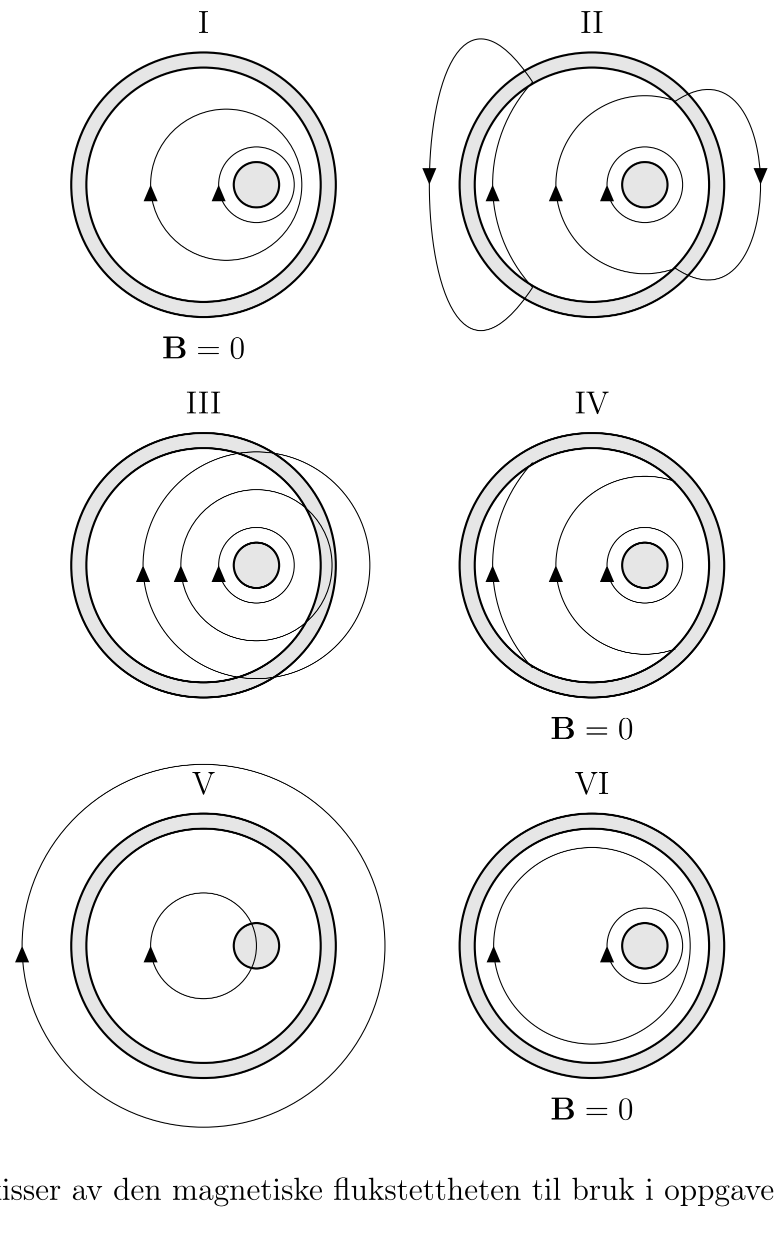
a) Beregn og skissér den magnetiske flukstettheten $|\mathbf{B}|$ som funksjon av r, der $0 \leq r < \infty$. (Denne deloppgaven teller dobbelt så mye som de andre deloppgavene.)

b) Antagelsen om at strømmen er jevnt fordelt over tverrsnittsarealet er ikke oppfylt for høye frekvenser. Tegn og forklar hvorfor. Se bare på innerlederen.

c) Anta at innerlederen forskyves slik at lederne blir liggende eksentrisk. Strømmen antas fortsatt jevnt fordelt over inner- og ytterleder. Figuren på neste side viser seks forslag til grove skisser av den totale magnetiske flukstettheten. Forklar hvorfor alle skissene unntatt skisse II må være gale.



Figur 2: Koaksialkabel.



Figur 3: Skisser av den magnetiske flukstettheten til bruk i oppgave **2c)** og **2d)**.

d) Skisse II er ment å være en grov skisse av det riktige feltet. Studenten Pirk Kveruler ser på skissen i detalj, og sier at det er en flatestrøm på den indre flaten til ytterlederen, på tross av at oppgaven sier at strømmen skulle være jevnt fordelt over tverrsnittet. Forklar hvorfor Pirk har et godt poeng.

Oppgave 3

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

a) Hva er sant om strømtettheten $\mathbf{J}$ i statikken? Statikk betyr her at $\mathbf{J}$ skal være uavhengig av tiden.

i) $\nabla \times \mathbf{J} = 0$.

ii) $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

iii) $\nabla^2 \mathbf{J} = 0$.

iv) Alle alternativene ovenfor er riktige.

b) En av lovene i elektromagnetisme er $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Hva kan du si om denne loven?

i) Den heter Faradays lov.

ii) Den inneholder et ledd som kalles forskyvingsstrømtetthet.

iii) Den kan brukes til å finne det magnetiske feltet utenfor en leder som fører en konstant strøm.

iv) Alle alternativene ovenfor.

c) En ring med radius a har uniform linjeladningstetthet. Det er vakuum overalt ellers. Hva er det elektriske feltet $\mathbf{E}$ og potensialet V i sentrum av ringen? La referansen for potensialet være uendelig langt unna ringen.

i) $\mathbf{E} = 0$ og $V = 0$.

ii) $\mathbf{E} < 0$ og $V = 0$.

iii) $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{\mathbf{r}}$ og $V = 0$.

iv) $\mathbf{E} = 0$ og $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$.

d) Hva er rett om gjensidig induktans L_{12}? De to spolene 1 og 2 har henholdsvis N_1 and N_2 viklinger. Anta lineært medium overalt.

i) L_{12} kan ha begge fortegn, avhengig av hvordan man velger positiv omløpsretning for spolene.

ii) L_{12} er proporsjonal med $N_1 N_2$.

iii) $L_{12} = L_{21}$.

iv) Alle alternativene ovenfor er riktige.

e) På det populære nettstedet ElmagTube ser du en film der en frosk svever over en ekstremt sterk magnet. Hva kan du ut fra dette si om den relative permeabiliteten til vann (som frosken for det meste består av)?

i) $\mu_\mathrm{r} < 1$, dvs. diamagnetisk.

ii) $\mu_\mathrm{r} > 1$, dvs. paramagnetisk.

iii) $\mu_\mathrm{r} \gg 1$, dvs. ferromagnetisk.

iv) $\mu_\mathrm{r} = \pi^2 \int_0^\infty ABEDH \mathrm{d}t$, dvs. froskomagnetisk.

Formler i elektromagnetisme:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2}\hat{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{F}/q, \quad V_P = \int_P^{\text{ref}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}, \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \quad \mathbf{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i }S}, \quad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \epsilon_0\chi_{\mathrm{e}}\mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_{\mathrm{e}}), \quad C = Q/V, \quad C = \epsilon S/d, \quad W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}CV^2, \quad w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E},$$

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}, \quad \mathbf{J} = NQ\mathbf{v}, \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \quad P_{\mathrm{J}} = \int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2}, \quad \mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B}, \quad \mathbf{F} = Q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \quad \mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mathbf{B},$$

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \chi_{\mathrm{m}}\mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mu = \mu_0(1+\chi_{\mathrm{m}}),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \quad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \quad w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \quad L = \frac{\Phi}{I}, \quad W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_{\mathrm{m}})_{\text{uten kilder eller tap}}, \quad \mathbf{F} = +(\nabla W_{\mathrm{m}})_{I=\text{konst}}, \quad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \oint_C \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \quad e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \quad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \quad \oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i }S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \quad \oint_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad \nabla^2\mathbf{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J},$$

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\mathbf{E}_{1\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2\mathrm{t}}, \quad \mathbf{D}_{1\mathrm{n}} - \mathbf{D}_{2\mathrm{n}} = \rho_{\mathrm{s}}\hat{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{H}_{1\mathrm{t}} - \mathbf{H}_{2\mathrm{t}} = \mathbf{J}_{\mathrm{s}}\times\hat{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{B}_{1\mathrm{n}} = \mathbf{B}_{2\mathrm{n}}.$$

Konstanter:

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m

$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854\cdot 10^{-12}$ F/m

Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0\cdot 10^8$ m/s

Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

Elementærladningen: $e = 1.6\cdot 10^{-19}$ C

Elektronets hvilemasse: $m_{\mathrm{e}} = 9.11\cdot 10^{-31}$ kg

Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2

Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673\cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} \text{ (x vilkårlig akse)} \\
\nabla(V+W) &= \nabla V + \nabla W \\
\nabla(VW) &= V\nabla W + W\nabla V \\
\nabla f(V) &= f'(V)\nabla V \\
\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} \\
&\quad + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \\
\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B} \\
\nabla\cdot(V\mathbf{A}) &= V\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla V \\
\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B} \\
\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B} \\
\nabla\times(V\mathbf{A}) &= (\nabla V)\times\mathbf{A} + V\nabla\times\mathbf{A} \\
\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) &= 0 \\
\nabla\cdot(\nabla V) &= \nabla^2 V \\
\nabla\times(\nabla V) &= 0 \\
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}
\end{aligned}
$$

Integralidentiteter:

$$
\begin{aligned}
\int_v \nabla V \mathrm{d}v &= \oint_S V \mathrm{d}\mathbf{S} \\
\int_v \nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}v &= \oint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \text{(Divergensteoremet)} \\
\int_v \nabla\times\mathbf{A}\mathrm{d}v &= \oint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{A} \\
\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} &= \oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}
\end{aligned}
$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \\
&+ \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) \\
&+ \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r}\left(\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)
\end{aligned}
$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} \\
&+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) \\
&+ \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r}\right) \\
&+ \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) \\
&+ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) \\
&+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}
\end{aligned}
$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

KANDIDATNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				