Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektroniske systemer

Faglærer:
Johannes Skaar

KONTINUASJONSEKSAMEN I EMNE
TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

August 2017

Alle vanlige deloppgaver teller 4 poeng. For flervalgsoppgaven er det egne regler som angitt. Maks poengsum er 51.

Oppgave 1

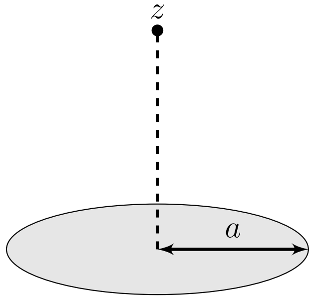
a) Finn potensialet V en høyde z over senter til en disk med radius a og konstant flateladningstetthet ρ_s, se fig. 1. La referansepunktet være i uendeligheten og anta $z > 0$.

b) Vis at det elektriske feltet $\mathbf{E}$ i samme punkt er

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}}. \tag{1}$$

c) Uten å kjenne utledningen av uttrykket (1), kontroller at uttrykket har riktig dimensjon.

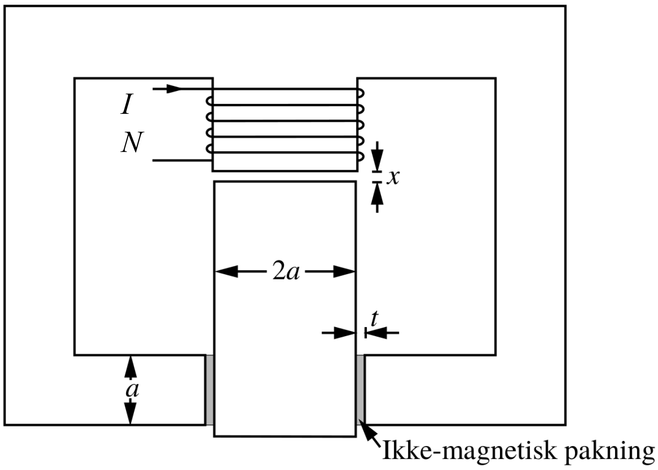
d) Bruk minst to metoder (bortsettfra dimensjonsanalysen i forrige delspørsmål) for å kontrollere at (1) er fornuftig.



Figur 1: Disk med konstant flateladningstetthet ρ_s.

Oppgave 2

Figuren viser et tverrsnitt av en magnetisk krets. Materialet i kjernen og stempelet antas å ha uendelig permeabilitet ($\mu = \infty$). Tykkelsen til kretsen normalt på papirplanet er a. Gapene antas så små at fluksen kan betraktes som konstant i dem.



Figur 2: En magnetisk krets. Tykkelsen normalt på papirplanet er a overalt. Stempelet er enheten som er mellom de to pakningene – denne delen er bevegelig i vertikal retning.

a) Vis at spolens selvinduktans er

$$L = \frac{2\mu_0 a^2 N^2}{x + t}, \tag{2}$$

der N er antall viklinger til spolen.

b) Finn systemets totale magnetiske energi W_m på to ulike måter.

c) Stempelet glir friksjonsfritt og har masse m. Bestem strømmen I som skal til for at den magnetiske kraften akkurat skal motvirke tyngdekraften. Tyngdeakselerasjonen er g.

d) Vil stempelet bli værende i ro? Med andre ord, er stillingen stabil? Svaret må begrunnes.

Oppgave 3

a) Vis Poissons ligning ut fra Gauss' lov og sammenhengen mellom $\mathbf{E}$ og V. Anta elektrostatikk. Hvilke antagelser er ellers nødvendig?

Oppgave 4

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

a) En av lovene i elektromagnetisme er $e = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$. Hva kan du si om denne loven?

i) Den heter Ampere–Maxwells lov.

ii) Den kan brukes til å finne $\mathbf{B}$ utenfor en permanentmagnet.

iii) Den kan brukes til å finne det elektriske feltet utenfor en ladningsfordeling i ro.

iv) Ingen av alternativene ovenfor er riktige.

b) En ideell, uendelig lang, sylindrisk leder fører en strøm langs aksen. Hva kan du si om Q', ladningen til lederen per lengdeenhet?

i) $Q' = 0$.

ii) $Q' > 0$.

iii) $Q' \neq 0$.

iv) Man kan ikke si noe om Q'.

c) Du skrur av lyset i et rom, og merker at det gnistrer inne i bryteren. Hva skjer?

i) Ledningen mellom bryteren og lyspæra utgjør en induktans. Når kretsen brytes, reduseres strømmen raskt slik at det induseres en stor spenning.

ii) Akkurat idet kretsen brytes, blir det er en stor spenning over bryteren, slik at det elektriske feltet er større enn terskelen for dielektrisk sammenbrudd i luft.

iii) Den raske endringen i strømmen vil sende ut en elektromagnetisk bølge.

iv) Alle alternativene ovenfor er riktige.

d) Det magnetiske vektorpotensialet er gitt av

$$\mathbf{A} = \begin{cases} Kr\hat{\boldsymbol{\phi}} & \text{for } r < a, \\ K\frac{a^2}{r}\hat{\boldsymbol{\phi}} & \text{for } r \geq a, \end{cases} \tag{3}$$

i et *sylindrisk* koordinatsystem. Her er K en konstant. Hva er $\mathbf{B}$ for $r < a$, og hva er opphavet til feltet?

i) $\mathbf{B} = 2K\hat{\mathbf{z}}$ for $r < a$. En uendelig solenoide eller sylindrisk permanentmagnet, radius a.

ii) $\mathbf{B} = K\hat{\mathbf{z}}$ for $r < a$. En uendelig solenoide eller sylindrisk permanentmagnet, radius a.

iii) $\mathbf{B} = 2K\hat{\mathbf{z}}$ for $r < a$. En toroide eller torus-formet permanentmagnet, radius a.

iv) $\mathbf{B} = K\hat{\mathbf{z}}$ for $r < a$. En toroide eller torus-formet permanentmagnet, radius a.

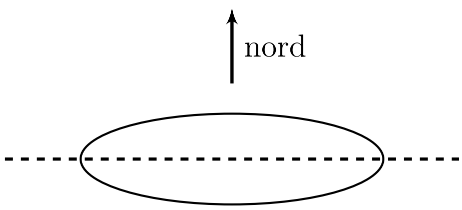
e) En ring laget av kobber spinner om den stiplede aksen på figuren, se fig. 3. Se bort fra luftmotstand. Hva kan du si om spinnet?

i) Ringen vil i prinsippet fortsette å spinne i det evige.

ii) Ringen vil spinne fortere og fortere inntil relativitetsteorien begrenser videre aksellerasjon.

iii) Ringen vil spinne saktere og saktere.

iv) Ringen vil begynne å ringe med mobiltelefon.



Figur 3: Metallring spinner om stiplet akse. Forsøket utføres i en ikke-magnetisk vakuumbeholder i Norge, og geografisk nord er oppover på figuren.

Formler i elektromagnetisme:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2}\hat{\mathbf{R}}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{F}/q, \qquad V_P = \int_P^{\text{ref}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i }S}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{P} = \epsilon_0\chi_{\text{e}}\mathbf{E}, \qquad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_{\text{e}}), \qquad C = Q/V, \qquad C = \epsilon S/d, \qquad W_{\text{e}} = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_{\text{e}} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E},$$

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}, \qquad \mathbf{J} = NQ\mathbf{v}, \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \qquad P_{\text{J}} = \int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B}, \qquad \mathbf{F} = Q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \qquad \mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mathbf{B},$$

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \qquad \mathbf{M} = \chi_{\text{m}}\mathbf{H}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_{\text{m}}),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad w_{\text{m}} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_{\text{m}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_{\text{m}})_{\text{uten kilder eller tap}}, \qquad \mathbf{F} = +(\nabla W_{\text{m}})_{I=\text{konst}}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i }S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\mathbf{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J},$$

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\mathbf{E}_{1\text{t}} = \mathbf{E}_{2\text{t}}, \qquad \mathbf{D}_{1\text{n}} - \mathbf{D}_{2\text{n}} = \rho_{\text{s}}\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{H}_{1\text{t}} - \mathbf{H}_{2\text{t}} = \mathbf{J}_{\text{s}}\times\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{B}_{1\text{n}} = \mathbf{B}_{2\text{n}}.$$

Konstanter:

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m

$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854\cdot 10^{-12}$ F/m

Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0\cdot 10^8$ m/s

Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

Elementærladningen: $e = 1.6\cdot 10^{-19}$ C

Elektronets hvilemasse: $m_{\text{e}} = 9.11\cdot 10^{-31}$ kg

Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2

Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673\cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} \text{ (x vilkårlig akse)} \\
\nabla(V+W) &= \nabla V + \nabla W \\
\nabla(VW) &= V\nabla W + W\nabla V \\
\nabla f(V) &= f'(V)\nabla V \\
\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} \\
&\quad + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \\
\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B} \\
\nabla\cdot(V\mathbf{A}) &= V\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla V \\
\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B} \\
\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B} \\
\nabla\times(V\mathbf{A}) &= (\nabla V)\times\mathbf{A} + V\nabla\times\mathbf{A} \\
\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) &= 0 \\
\nabla\cdot(\nabla V) &= \nabla^2 V \\
\nabla\times(\nabla V) &= 0 \\
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}
\end{aligned}$$

Integralidentiteter:

$$\begin{aligned}
&\int_v \nabla V \mathrm{d}v = \oint_S V \mathrm{d}\mathbf{S} \\
&\int_v \nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \text{(Divergensteoremet)} \\
&\int_v \nabla\times\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{A} \\
&\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}
\end{aligned}$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \\
&+ \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) \\
&+ \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} \\
&+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) \\
&+ \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right) \\
&+ \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) \\
&+ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) \\
&+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}
\end{aligned}$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

KANDIDATNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				