Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Faglærer:
Johannes Skaar

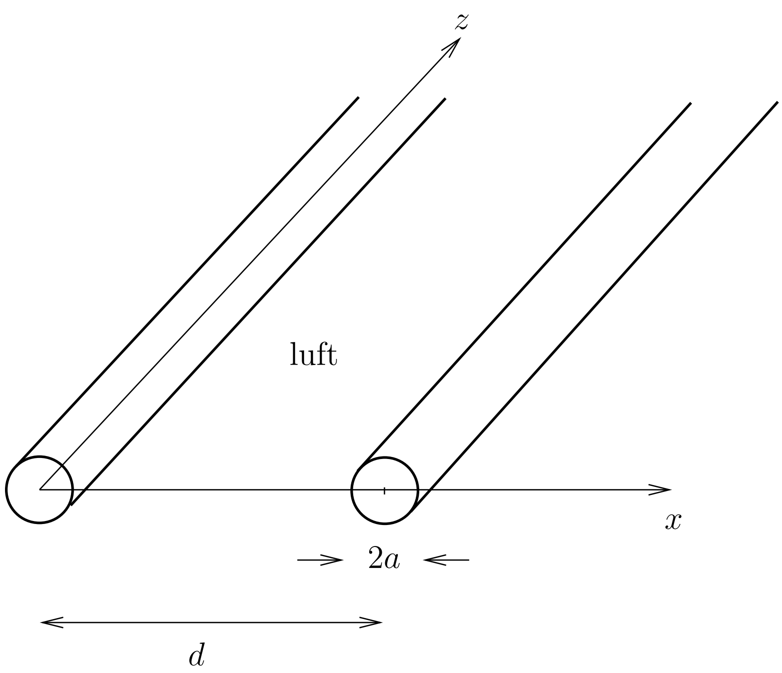
EKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

Onsdag 17. august 2016

Oppgave 1

I denne oppgaven ser vi på en to-trådslinje, som består av to parallelle, sylindriske ledere med avstand d mellom sentrene, se fig. 1. Begge har radius a, der $a \ll d$. Lederne er så lange at man kan se bort fra effekter nær endene (de kan regnes som uendelig lange). I området omkring kablene er det luft, med permittivitet ϵ_0 og permeabilitet μ_0.

I hele denne oppgaven skal du anta $a \ll d$, så der det er mulig bør du forenkle svarene ved å bruke denne betingelsen.



Figur 1: To-trådslinje med parallelle, sylindriske ledere. Begge lederne har radius a.

a) Anta at kabelen til venstre har en ladning per lengdeenhet Q', mens kabelen til høyre har ladning per lengdeenhet $-Q'$. Vis at det elektriske feltet for $a < x < d - a$ langs x-aksen er

$$\mathbf{E} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-d}\right)\hat{\mathbf{x}}. \tag{1}$$

b) Finn potensialforskjellen V_0 mellom lederne, og kapasitansen per lengdeenhet C' for to-trådslinja.

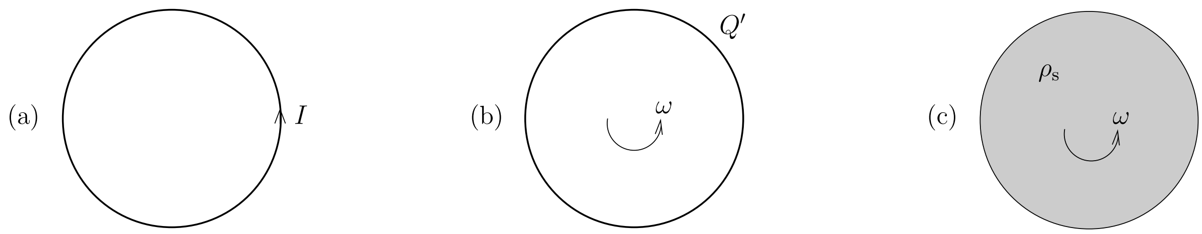
c) Hvorfor er det nødvendig å anta $a \ll d$ for å kunne utføre beregningene ovenfor på en enkel måte?

d) Den venstre lederen fører nå strømmen I i positiv z-retning, mens returstrømmen $-I$ går i den andre. Finn den magnetiske kraften per lengdeenhet som virker på den høyre lederen (når du antar $a \ll d$).

e) En motstand med resistans R kobles mellom de to lederne i den ene enden, og en spenningskilde V_0 kobles mellom lederne i den andre enden. Er det mulig å velge resistansen R slik at netto kraft på lederne blir null (grunngi svaret)? Hvor stor må i så fall R være?

Oppgave 2

I denne oppgaven antas det at permabiliteten er $\mu = \mu_0$ overalt.



Figur 2: (a) En strømsløyfe. (b) En ladet ring som roterer med vinkelhastighet ω. (c) En ladet disk som roterer med vinkelhastighet ω.

a) Finn den magnetiske flukstettheten $\mathbf{B}$ i sentrum av en sirkulær strømsløyfe med radius a. Sløyfen fører en strøm I, se fig. 2(a).

b) Hvis en ladet ring med radius a roterer med vinkelhastighet ω rundt sin akse, hva blir $\mathbf{B}$ i sentrum av ringen? Anta at ladningen er jevnt fordelt over ringen, slik at linjeladningstettheten Q' er konstant. Se fig. 2(b).

c) En ladet disk med radius a roterer med vinkelhastighet ω, se fig. 2(c). Anta at ladningen er jevnt fordelt over disken, slik at flateladningstettheten ρ_s er konstant. Vis at styrken til $\mathbf{B}$ i sentrum av disken blir

$$B = \frac{\mu_0 \omega \rho_s a}{2}, \tag{2}$$

og finn retningen.

d) Kontroller at svaret (2) i forrige delspørsmål har rett dimensjon.

Oppgave 3

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

a) En parallellplatekondensator består av to parallelle, kvadratiske lederplater, hver med areal a^2, og med en avstand d mellom seg. Anta at $d \ll a$. Området mellom platene er fylt av et rent dielektrisk medium med permittivitet ϵ. Hva er kapasitansen?

i) $C = \epsilon a^2/d$.

ii) $C = 2\epsilon a^2/d$.

iii) $C = \epsilon a/d$.

iv) $C = \epsilon_0 a/d$.

b) Hva er den fysiske tolkningen til $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$?

i) At **B**-feltet biter seg selv i halen.

ii) At **B**-feltet ikke kan strømme netto ut av en lukket flate.

iii) At **B**-feltslinjene ikke kan starte eller stoppe noe sted.

iv) Alle alternativene ovenfor.

c) Du befinner deg et sted der det jordmagnetiske feltet er 50μT. Du har en kvadrisk spole med 1000 viklinger, der alle viklinger er i samme plan og omslutter det samme arealet. Kvadratet har side 10cm. Hvor raskt må du minst snurre spolen rundt for å få indusert en spenningsamplitude på 1V?

i) 3.2 omdreininger i sekundet.

ii) 32 omdreininger i sekundet.

iii) 320 omdreininger i sekundet.

iv) 3200 omdreininger i sekundet.

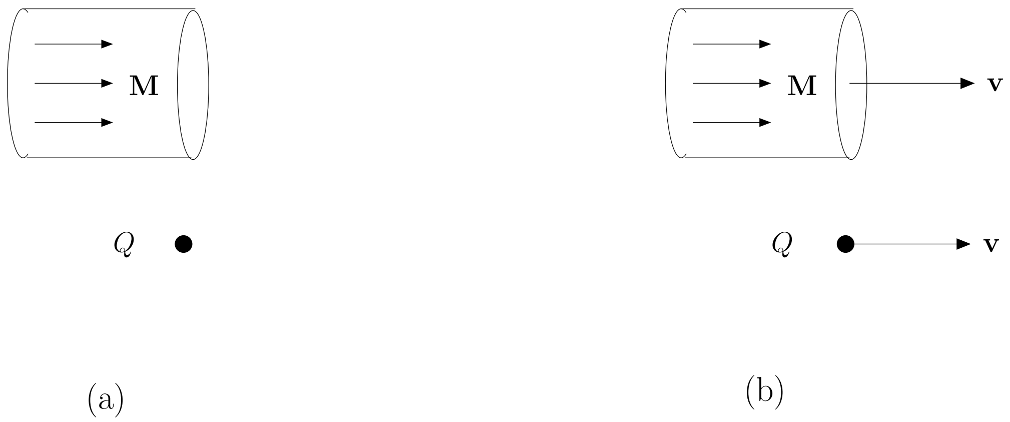
d) En permanentmagnet og en punktladning befinner seg i vakuum, og i nærheten av hverandre, se fig. 3(a). Begge er i ro. Hva er kraften fra magneten på ladningen?

i) 0.

ii) Frastøtende.

iii) Tiltrekkende.

iv) Ulik null, men retningen er avhengig av hvordan de er plassert i forhold til hverandre.



Figur 3: En permanentmagnet og en ladning Q befinner seg i nærheten av hverandre. (a) Begge er i ro. (b) Begge beveger seg med den samme hastigheten $\mathbf{v}$.

e) Vi ser fortsatt på situasjonen i forrige deloppgave, der en permanentmagnet og en ladning er i ro i forhold til hverandre, men denne gangen beveger begge på seg med hastighet $\mathbf{v}$ i forhold til observatøren, se fig. 3(b). Hastigheten er mye mindre enn lyshastigheten. Hva kan du si om feltet fra permanentmagneten der punktladningen befinner seg i et gitt tidspunkt, sett fra observatøren?

i) Det blir bare et magnetisk felt, uavhengig av $\mathbf{v}$.

ii) Det blir både et elektrisk og et magnetisk felt slik at $\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} = 0$.

iii) Det blir bare et elektrisk felt, uavhengig av $\mathbf{v}$.

iv) Man kan jo si mye rart om det. Elektromagnetiske felter er noe kunstig som menneskene har skapt. Livet hadde vært mye bedre uten elektromagnetiske felter.

Formler i elektromagnetisme:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2}\hat{\mathbf{R}}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{F}/q, \qquad V_P = \int_P^{\text{ref}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{P} = \epsilon_0\chi_{\text{e}}\mathbf{E}, \qquad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_{\text{e}}), \qquad C = Q/V, \qquad C = \epsilon S/d, \qquad W_{\text{e}} = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_{\text{e}} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E},$$

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}, \qquad \mathbf{J} = NQ\mathbf{v}, \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \qquad P_{\text{J}} = \int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B}, \qquad \mathbf{F} = Q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \qquad \mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mathbf{B},$$

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \qquad \mathbf{M} = \chi_{\text{m}}\mathbf{H}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_{\text{m}}),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad w_{\text{m}} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_{\text{m}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_{\text{m}})_{\text{uten kilder eller tap}}, \qquad \mathbf{F} = +(\nabla W_{\text{m}})_{I=\text{konst}}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\mathbf{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J},$$

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\mathbf{r}', t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\mathbf{E}_{1\text{t}} = \mathbf{E}_{2\text{t}}, \qquad \mathbf{D}_{1\text{n}} - \mathbf{D}_{2\text{n}} = \rho_{\text{s}}\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{H}_{1\text{t}} - \mathbf{H}_{2\text{t}} = \mathbf{J}_{\text{s}}\times\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{B}_{1\text{n}} = \mathbf{B}_{2\text{n}}.$$

Konstanter:

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m

$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854\cdot 10^{-12}$ F/m

Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0\cdot 10^8$ m/s

Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

Elementærladningen: $e = 1.6\cdot 10^{-19}$ C

Elektronets hvilemasse: $m_{\text{e}} = 9.11\cdot 10^{-31}$ kg

Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2

Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673\cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} \quad (x \text{ vilkårlig akse}) \\
\nabla(V+W) &= \nabla V + \nabla W \\
\nabla(VW) &= V\nabla W + W\nabla V \\
\nabla f(V) &= f'(V)\nabla V \\
\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} \\
&\quad + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \\
\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B} \\
\nabla\cdot(V\mathbf{A}) &= V\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla V \\
\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B} \\
\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B} \\
\nabla\times(V\mathbf{A}) &= (\nabla V)\times\mathbf{A} + V\nabla\times\mathbf{A} \\
\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) &= 0 \\
\nabla\cdot(\nabla V) &= \nabla^2 V \\
\nabla\times(\nabla V) &= 0 \\
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}
\end{aligned}
$$

Integralidentiteter:

$$
\begin{aligned}
&\int_v \nabla V \mathrm{d}v = \oint_S V \mathrm{d}\mathbf{S} \\
&\int_v \nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \text{(Divergensteoremet)} \\
&\int_v \nabla\times\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{A} \\
&\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}
\end{aligned}
$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}&\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \\
+ \hat{\mathbf{y}}&\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) \\
&+ \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)
\end{aligned}
$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} \\
&+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) \\
&+ \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right) \\
&+ \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) \\
&+ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) \\
&+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}
\end{aligned}
$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

KANDIDATNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				