Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

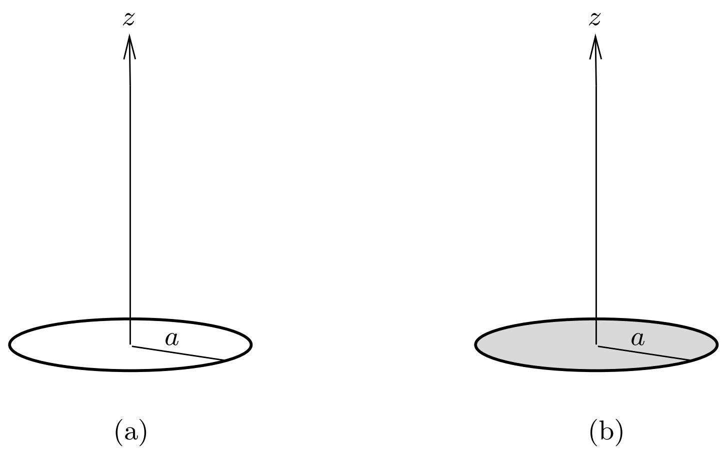
Faglærer:
Johannes Skaar

EKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

Torsdag 21. mai 2015

Oppgave 1

I hele denne oppgaven er det vakuum utenfor ringen eller disken.



Figur 1: (a) En ladet ring med linjeladningstetthet Q'. (b) En ladet disk med flateladningstetthet ρ_s.

a) En ring med radius a har jevnt fordelt linjeladningstetthet Q'. Vis at potensialet $V(z)$, på aksen til ringen, kan skrives

$$V(z) = \frac{aQ'}{2\epsilon_0\sqrt{z^2+a^2}}, \quad \text{for } z > 0, \tag{1}$$

når referansen er i uendeligheten.

b) En disk med radius a har jevnt fordelt flateladningstetthet ρ_s. Vis at potensialet $V(z)$, på aksen til disken, kan skrives

$$V(z) = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{z^2+a^2} - z\right), \quad \text{for } z > 0, \tag{2}$$

når referansen er i uendeligheten.

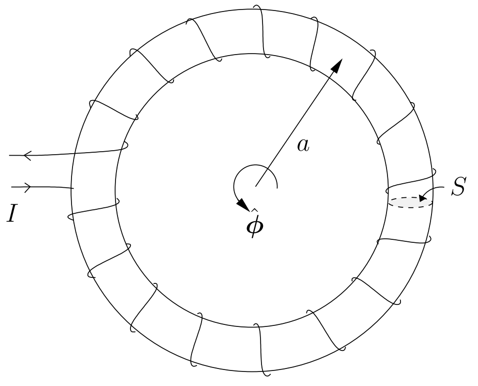
c) Finn det elektriske feltet $\mathbf{E}$ langs aksen, for $z > 0$, både for ringen og disken.

d) Skisser $|\mathbf{E}|$ som funksjon av z for $z > 0$, både for ringen og disken. Tolk/forklar oppførselen i skissene fysisk, både for små og store z, og finn eventuelle ekstremalpunkter.

e) Ringen roterer nå med konstant vinkelhastighet ω. Vis at vi da effektivt sett har en strøm $I = \omega a Q'$.

f) Hva blir $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ i sentrum av den roterende ringen?

Oppgave 2



Figur 2: En tettviklet toroide med N jevnt fordelte viklinger. Toroiden er tynn og har tverrsnittsareal S.

a) Gitt en toroide med N viklinger som fører strømmen I, se fig. 2. Viklingene er tett og jevnt fordelt rundt toroiden. Toroiden kan i hele oppgaven antas å være tynn, slik at feltet er uniformt over tverrsnittsarealet S. Finn $\mathbf{H}$ i toroiden.

b) Dersom materialet i toroiden (det som spolen er viklet rundt) er ikke-magnetisk, dvs. har permabilitet μ_0, hva blir selvinduktansen?

c) Skisser en typisk hysteresekurve $B(H)$ for et ferromagnetisk materiale. Hva representerer arealet inne i kurven? Du trenger ikke grunngi svaret.

d) Strømmen $I(t)$ varierer harmonisk, med amplitude I_0 og frekvens f. Materialet i toroiden er nå ferromagnetisk, med ukjent hysteresekurve $B(H)$. For å finne hysteresekurven vikles en spole nummer 2 rundt toroiden, med N_2 viklinger, og kobles til et oscilloskop med uendelig resistans. Oscilloskopet måler spenningen som funksjon av tiden. Vis og forklar hvordan du kan finne hysteresekurven $B(H)$ ut fra $I(t)$ og spenningsforløpet på oscilloskopet? Du kan anta at B-feltet er kjent ved et tidspunkt $t = 0$.

Oppgave 3

a) Vi ser på vakuum, helt uten alle slags ladninger og strømmer. Vis bølgeligningen for **E**-feltet ut fra Maxwells ligninger. Hva blir bølgehastigheten?

Oppgave 4

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

a) Gitt et stykke av en ideell leder. Hva kan du si om feltet i vakuum, rett utenfor lederen?

i) **E** står normalt på overflaten.

ii) **E** er parallell med overflaten.

iii) Verken **E** eller **D** står normalt på, eller er parallell med overflaten.

iv) Ingen av alternativene ovenfor er korrekte.

b) Du finner på en nettside at kapasitansen per lengdeenhet for en koaksialkabel er gitt av

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_{\mathrm{r}}\epsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}, \tag{3}$$

der a og b er radius til henholdsvis inner- og ytterleder, og ϵ_{r} er den relative permittiviteten til mediet mellom lederne. Du gjør diverse kontroller for å se om uttrykket stemmer. Hva er rett om uttrykket du har funnet?

i) Uttrykket har rett dimensjon.

ii) Hvis avstanden mellom inner- og ytterleder blir liten, dvs. $a \approx b$, så gjenfinner vi uttrykket for en parallellplatekondensator. Oppgitt: $\ln(1+u) \approx u$ når $u \ll 1$.

iii) Begge alternativene ovenfor er korrekte.

iv) Ingen av alternativene ovenfor er korrekte.

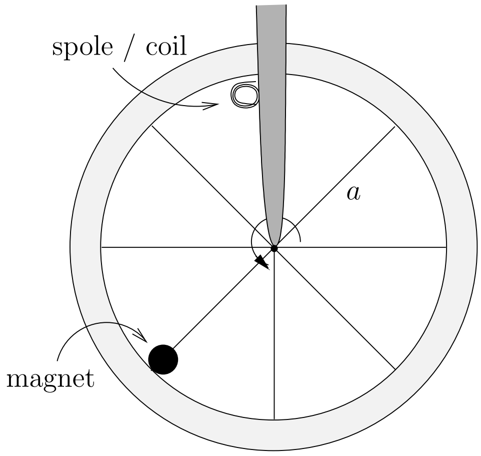
c) Hva er rett om forskyvingsstrøm-tettheten $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$?

i) I et område med vakuum (ladningsfritt) er den alltid null.

ii) Den er alltid positiv.

iii) Den er alltid negativ.

iv) Ingen av alternativene ovenfor er riktige.



Figur 3: Sykkelhjul

d) Den ivrige syklisten P. Dahl har montert en permanentmagnet fast på hjulet og en spole på den faste gaffelen, se fig. 3. Dette utstyret skal brukes til å lade opp et batteri som igjen skal gi strøm til elektronisk utstyr og lys. Du forteller herr Dahl at den fysiske loven som gjør at batteriet lades opp har følgende navn og kan skrives på følgende form:

i) Faradays lov: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.

ii) Amperes lov: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.

iii) Faradays lov: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.

iv) Amperes lov: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

e) Vi ser fortsatt på anordningen til P. Dahl. Det som kobles til spolen kan sees på som en last (resistans) R. Denne resistansen er så stor at vi kan se bort fra selvinduktansen til spolen. Hva skjer når Dahl sykler dobbelt så fort? Vi er her interessert i maksverdien til emf'en (over en omdreining av hjulet), og gjennomsnittseffekten levert av spolen (over en omdreining).

i) Maksverdien av emf'en blir dobbelt så stor, men denne maksverdien inntreffer dobbelt så ofte. Dermed blir gjennomsnittseffekten $2 \cdot 2^2 = 8$ ganger så stor.

ii) Maksverdien av emf'en blir dobbelt så stor. Gjennomsnittseffekten blir $2^2 = 4$ ganger så stor.

iii) Maksverdien av emf'en blir uendret, men denne maksverdien inntreffer dobbelt så ofte. Dermed blir gjennomsnittseffekten dobbelt så stor.

iv) Dahl mister kontrollen og går på trynet ned i grøfta. Han er bitter og bestemmer seg for å saksøke James Clerk Maxwell. Maxwell blir dømt til å betale erstatning.

Formler i elektromagnetisme:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2}\hat{\mathbf{R}}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{F}/q, \qquad V_P = \int_P^{\mathrm{ref}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i }S}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{P} = \epsilon_0\chi_{\mathrm{e}}\mathbf{E}, \qquad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_{\mathrm{e}}), \qquad C = Q/V, \qquad C = \epsilon S/d, \qquad W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E},$$

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}, \qquad \mathbf{J} = NQ\mathbf{v}, \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \qquad P_{\mathrm{J}} = \int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B}, \qquad \mathbf{F} = Q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \qquad \mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mathbf{B},$$

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \qquad \mathbf{M} = \chi_{\mathrm{m}}\mathbf{H}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_{\mathrm{m}}),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_{\mathrm{m}})_{\text{uten kilder eller tap}}, \qquad \mathbf{F} = +(\nabla W_{\mathrm{m}})_{I=\text{konst}}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i }S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\mathbf{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J},$$

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\mathbf{r}', t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\mathbf{E}_{1\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2\mathrm{t}}, \qquad \mathbf{D}_{1\mathrm{n}} - \mathbf{D}_{2\mathrm{n}} = \rho_{\mathrm{s}}\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{H}_{1\mathrm{t}} - \mathbf{H}_{2\mathrm{t}} = \mathbf{J}_{\mathrm{s}}\times\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{B}_{1\mathrm{n}} = \mathbf{B}_{2\mathrm{n}}.$$

Konstanter:

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m

$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854\cdot 10^{-12}$ F/m

Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0\cdot 10^8$ m/s

Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

Elementærladningen: $e = 1.6\cdot 10^{-19}$ C

Elektronets hvilemasse: $m_{\mathrm{e}} = 9.11\cdot 10^{-31}$ kg

Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2

Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673\cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} \text{ (x vilkårlig akse)} \\
\nabla(V+W) &= \nabla V + \nabla W \\
\nabla(VW) &= V\nabla W + W\nabla V \\
\nabla f(V) &= f'(V)\nabla V \\
\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} \\
&\quad + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \\
\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B} \\
\nabla\cdot(V\mathbf{A}) &= V\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla V \\
\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B} \\
\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B} \\
\nabla\times(V\mathbf{A}) &= (\nabla V)\times\mathbf{A} + V\nabla\times\mathbf{A} \\
\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) &= 0 \\
\nabla\cdot(\nabla V) &= \nabla^2 V \\
\nabla\times(\nabla V) &= 0 \\
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}
\end{aligned}
$$

Integralidentiteter:

$$
\begin{aligned}
&\int_v \nabla V \mathrm{d}v = \oint_S V \mathrm{d}\mathbf{S} \\
&\int_v \nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \text{(Divergensteoremet)} \\
&\int_v \nabla\times\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{A} \\
&\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}
\end{aligned}
$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}&\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \\
+ \hat{\mathbf{y}}&\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) \\
&+ \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right)
\end{aligned}
$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} \\
&+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right) \\
&+ \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right) \\
&+ \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) \\
&+ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) \\
&+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}
\end{aligned}
$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

KANDIDATNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				