Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

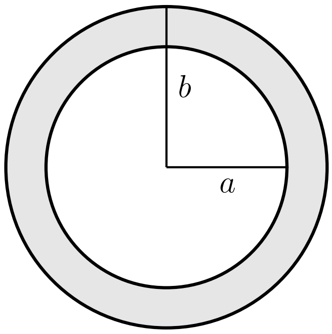
Faglærer:
Johannes Skaar

EKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

Mandag 3. august 2015

Oppgave 1

a) Gitt to ideelt ledende, konsentriske kuleskall med radius henholdsvis a og b. Volumet mellom de to lederne (grått område på figuren) er først fylt med et rent dielektrisk medium med permittivitet ϵ. Finn kapasitansen til en slik kondensator.



b) Kontroller svaret i **a)** ved å vise at kapasitansen blir som for en parallellplatekondensator når sjiktet mellom lederne blir veldig tynt.

Hva blir kapasitansen til en enkelt ledende kule omgitt av materialet ϵ? Tips: Betrakt denne som kulekondensatoren i **a)** når b er mye større enn a.

c) Vi bytter nå ut det dielektriske mediet mellom de ledende kuleskallene med et delvis ledende medium med konduktivitet σ. Finn resistansen målt mellom de ledende kuleskallene.

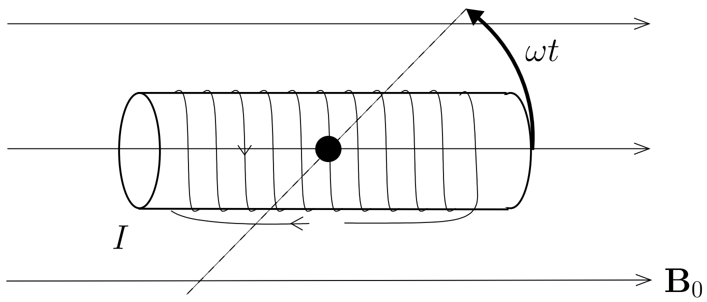
d) En ideell lederkule med radius a graves langt ned i jorda. Hva blir jordingsresistansen målt fra lederkula? En varm sommerdag klager det elektriske anlegget over at jordingsresistansen ikke er som den burde være. Hva kan årsaken være?

Oppgave 2

a) En lang og tynn, tettviklet solenoide fører strømmen I. Solenoiden har N viklinger, radius a og lengde l. Finn den magnetiske flukstettheten $\mathbf{B}$ i solenoiden. Du kan ta for gitt at $\mathbf{B}$ er rettet langs aksen til solenoiden, og at feltet utenfor solenoiden er neglisjerbart. Anta at permabiliteten er μ_0 overalt.

b) Finn selvinduktansen L til solenoiden.

c) Solenoiden fra forrige delspørsmål er festet til en turbin slik at den roterer med vinkelhastighet ω om en akse normalt på sylinderaksen, se fig. 1. Vannstrømmen som driver turbinen er regulert slik at turbinens vinkelhastighet ω er konstant. Vi antar først at solenoiden ikke er koblet til noe, så strømmen i den er null. Det er et homogent og tidsuavhengig felt $\mathbf{B}_0$ i området der solenoiden befinner seg. Feltet står normalt på rotasjonsaksen, og vi antar at ved $t = 0$ er solenoidens akse i samme retning som feltet. Finn den induserte emf'en e i solenoiden.



Figur 1: En tettviklet solenoide med N viklinger og radius a roteres i et uniformt $\mathbf{B}_0$-felt. Rotasjonsaksen kommer ut av papiret, og er markert med en svart prikk i midten av solenoiden. Figuren viser et øyeblikkbilde ved $t = 0$. Etter en tid t har solenoiden rotert en vinkel ωt.

d) Solenoiden er nå koblet til en last med resistans R som roterer med solenoiden. Forklar hvorfor systemet tilfredsstiller følgende ligning

$$e - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = RI, \tag{1}$$

der e er emf'en du fant i forrige deloppgave.

e) Finn I under forutsetning av at L er neglisjerbar. Finn også (det mekaniske) momentet $\mathbf{T}$ som virker på solenoiden pga. strømmen.

f) Kraftverket som vi har sett på i denne oppgaven, er eneste kraftforsyning til et isolert samfunn uten elektrisk tilknytning til utenomverden. I en kjent sketsj "Norsk sluttstrøm" påstås det at det er nødvendig å bruke opp "den strømmen som blir til overs". Dvs. hvis forbrukerne ikke bruker opp alt som produseres, må de flittige arbeidskarene i "Norsk sluttstrøm" gjøre det. Ut fra modellen vi har sett på i denne oppgaven, forklar hvorfor sketsjen bare må være tull.

Oppgave 3

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

a) Se på bildet av en magnet som har trukket til seg jernfilspon. Hvorfor er det mest spon på hjørnene og kantene til magneten?

Figur 2: En magnet har trukket til seg jernfilspon.

i) Fordi magnetiseringen i permanentmagneter alltid er sterkest ved hjørnene.

ii) Kraften på en magnetisk dipol i et uniformt **B**-felt er null. Der feltet endrer seg raskt med posisjon, fås derimot en stor kraft.

iii) Kraften på en magnetisk dipol er størst der **B**-feltet er uniformt.

iv) Fordi han som tok bildet har flyttet på jernfilsponet for å få et fint bilde.

b) Du finner på en nettside at energien i et elektromagnetisk system er gitt av

$$W = 2QV + Ba^2J, \tag{2}$$

der Q er ladning, V er potensialforskjell, B er B-felt, a er en lengde og J er strømtetthet. En dimensjonsanalyse viser at

i) Begge leddene er feil.

ii) Det første leddet har riktig dimensjon mens det andre er feil.

iii) Det første leddet er feil mens det andre har riktig dimensjon.

iv) Begge leddene har riktig dimensjon.

c) Vi ønsker å fordoble kapasitansen til en parallellplatekondensator. Dette får vi til ved å

i) fordoble avstanden mellom platene og firedoble ϵ til det dielektriske mediet mellom platene.

ii) halvere avstanden mellom platene.

iii) la platene få dobbelt så stort areal.

iv) Alle alternativene ovenfor er korrekte.

d) En parallellplatekondensator består av to parallelle, kvadratiske lederplater, hver med areal a^2, og med en avstand d mellom seg. Anta at $d \ll a$. Området mellom platene er fylt av et medium med permanent polarisering $\mathbf{P}$. Hvis vi definerer kapasitansen til å være $C = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}V$, hva er riktig?

i) $C = \epsilon_0 a^2/d$.

ii) $C = \epsilon a^2/d$.

iii) $C = \epsilon_0 a^2/d + Pa^2/d$.

iv) $C = \epsilon_0 a^2/d + P$.

e) B. Flusk skal finne $\mathbf{B}$-feltet i sentrum av en ring som fører den konstante strømmen I. Ringen har radius a, og det er vakuum overalt rundt ringen. Han skriver som følger: "Bruker Amperes lov og får vha. symmetri at $H 2\pi a = I$, og derfor $B = \mu_0 H = \mu_0 I/(2\pi a)$. Hva vil du si til Flusk?

i) Både metoden og svaret er riktige (men gjør bedre rede for symmetri-argumentet)!

ii) Verken metoden eller svaret er riktig. Hvilken kurve har du integrert over, og hvilken vei er $\mathbf{H}$ rettet langs denne kurven?

iii) Ærlig talt, du er en stor idiot! Bruk i stedet loven "B-felt som ringer er som fiskens finger".

iv) Glem Amperes lov da. Apropos ringer, vil du gifte deg med meg?

Formler i elektromagnetisme:

$$\mathbf{F}=\frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2}\hat{\mathbf{R}},\qquad \mathbf{E}=\mathbf{F}/q,\qquad V_P=\int_P^{\mathrm{ref}}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l},\qquad V=\frac{Q}{4\pi\epsilon R},\qquad \mathbf{E}=-\nabla V,$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=Q_{\mathrm{fri\ i}\ S},\qquad \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho,\qquad \mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P},\qquad \mathbf{P}=\epsilon_0\chi_{\mathrm{e}}\mathbf{E},\qquad \mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E},$$

$$\epsilon=\epsilon_0(1+\chi_{\mathrm{e}}),\qquad C=Q/V,\qquad C=\epsilon S/d,\qquad W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}CV^2,\qquad w_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E},$$

$$\mathbf{p}=Q\mathbf{d},\qquad \mathbf{J}=NQ\mathbf{v},\qquad \mathbf{J}=\sigma\mathbf{E},\qquad P_{\mathrm{J}}=\int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2},\qquad \mathrm{d}\mathbf{F}=I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B},\qquad \mathbf{F}=Q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}),\qquad \mathbf{T}=\mathbf{m}\times\mathbf{B},$$

$$\mathbf{m}=I\mathbf{S},\qquad \mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M},\qquad \mathbf{M}=\chi_{\mathrm{m}}\mathbf{H},\qquad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H},\qquad \mu=\mu_0(1+\chi_{\mathrm{m}}),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\int_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},\qquad w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H},$$

$$L_{12}=\frac{\Phi_{12}}{I_1}=L_{21}=\frac{\Phi_{21}}{I_2},\qquad L=\frac{\Phi}{I},\qquad W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}I_k\Phi_k=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}L_{jk}I_jI_k,$$

$$\mathbf{F}=-(\nabla W_{\mathrm{m}})_{\text{uten kilder eller tap}},\qquad \mathbf{F}=+(\nabla W_{\mathrm{m}})_{I=\mathrm{konst}},\qquad \nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0.$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\qquad \oint_C \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=-\int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},\qquad e=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},\qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\int_S\left(\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho,\qquad \oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=Q_{\mathrm{fri\ i}\ S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \oint_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A},\qquad \mathbf{E}=-\nabla V-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\qquad \nabla^2V-\epsilon\mu\frac{\partial^2V}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\epsilon},\qquad \nabla^2\mathbf{A}-\epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu\mathbf{J},$$

$$V(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v\frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R},\qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_v\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\mathbf{E}_{1\mathrm{t}}=\mathbf{E}_{2\mathrm{t}},\qquad \mathbf{D}_{1\mathrm{n}}-\mathbf{D}_{2\mathrm{n}}=\rho_{\mathrm{s}}\hat{\mathbf{n}},\qquad \mathbf{H}_{1\mathrm{t}}-\mathbf{H}_{2\mathrm{t}}=\mathbf{J}_{\mathrm{s}}\times\hat{\mathbf{n}},\qquad \mathbf{B}_{1\mathrm{n}}=\mathbf{B}_{2\mathrm{n}}.$$

Konstanter:

$\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ H/m

$\epsilon_0=1/(\mu_0c_0^2)\approx 8.854\cdot10^{-12}$ F/m

Lyshastighet i vakuum: $c_0=1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}=299792458$ m/s $\approx 3.0\cdot10^8$ m/s

Lyshastighet i et medium: $c=1/\sqrt{\mu\epsilon}$

Elementærladningen: $e=1.6\cdot10^{-19}$ C

Elektronets hvilemasse: $m_{\mathrm{e}}=9.11\cdot10^{-31}$ kg

Standard tyngdeakselerasjon: $g=9.80665$ m/s^2

Gravitasjonskonstant: $\gamma=6.673\cdot10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}\cdot\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} \ (x \text{ vilkårlig akse})\\
\nabla(V+W) &= \nabla V + \nabla W\\
\nabla(VW) &= V\nabla W + W\nabla V\\
\nabla f(V) &= f'(V)\nabla V\\
\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}\\
&\quad + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})\\
\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}\\
\nabla\cdot(V\mathbf{A}) &= V\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla V\\
\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}\\
\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}\\
\nabla\times(V\mathbf{A}) &= (\nabla V)\times\mathbf{A} + V\nabla\times\mathbf{A}\\
\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) &= 0\\
\nabla\cdot(\nabla V) &= \nabla^2 V\\
\nabla\times(\nabla V) &= 0\\
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}
\end{aligned}$$

Integralidentiteter:

$$\begin{aligned}
&\int_v \nabla V \mathrm{d}v = \oint_S V \mathrm{d}\mathbf{S}\\
&\int_v \nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \text{(Divergensteoremet)}\\
&\int_v \nabla\times\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{A}\\
&\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}
\end{aligned}$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\\
&+ \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\\
&+ \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r}\\
&+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\\
&+ \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\\
&+ \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)\\
&+ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)\\
&+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}
\end{aligned}$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

KANDIDATNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				