Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

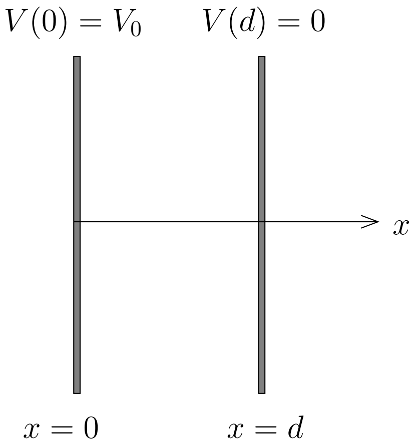
Faglærer:
Johannes Skaar

EKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

Fredag 23. mai 2014

Oppgave 1

En parallellplatekondensator består av to kvadratiske, parallelle lederplater, hver med areal a^2. Avstanden mellom platene er d. Anta at $d \ll a$. Platen som befinner seg i $x = 0$ har potensial V_0, mens platen i $x = d$ har potensial lik null, se fig. 1.



Figur 1: Parallellplatekondensator.

a) Området mellom platene er fylt av luft med permittivitet ϵ_0. Finn (utled uttrykket for) det elektriske feltet mellom platene.

b) Finn kapasitansen.

c) Vi lar nå mediet mellom de to platene ha uniform permittivitet ϵ og en uniform romladningstetthet ρ. Konduktiviteten er fortsatt null. Vis at potensialet i mediet er gitt av

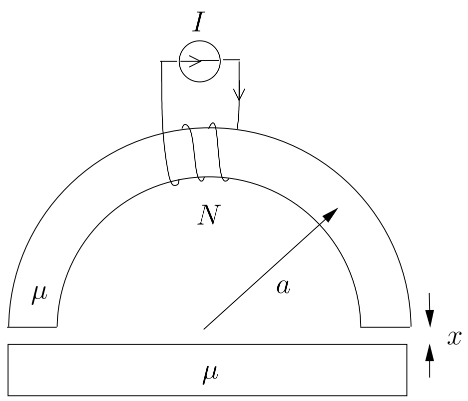
$$V(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon} + \left(\frac{\rho d}{2\epsilon} - \frac{V_0}{d}\right) x + V_0, \quad \text{for } 0 \le x \le d. \tag{1}$$

d) La ϵ være fast, og $V_0 > 0$. Anta $\rho > 0$. Forklar fysisk at når ρ er stor, så får $V(x)$ sitt maksimum et sted mellom platene, mens når ρ er liten blir maksimum på platen som har $V = V_0$. Hvor stor må ρ være for at vi skal få maksimum et sted mellom platene?

e) Vi tar nå ut mediet mellom platene og erstatter det med luft. Det settes inn en tredje lederplate med tykkelse $4d/5$ midt mellom platene, slik at det blir gap med tykkelse $d/10$ til venstre og til høyre for den nye lederplaten. Alle lederplatene er parallelle. Den nye lederplaten er netto uladd. Finn potensialet som funksjon av x for $0 \leq x \leq d$, og også kapasitansen til den modifiserte parallellplatekondensatoren.

Oppgave 2

Gitt en elektromagnet, se fig. 2. Elektromagneten er laget av en hesteskoformet kjerne (en halvsirkel) med permeabilitet μ og en spole med N viklinger. Elektromagneten løfter en bjelke, også med permeabilitet μ. Anta at tverrsnittsarealet S til kjernen og bjelken er det samme. Elektromagneten drives av en strømkilde som sørger for at det går en konstant strøm I igjennom spolen. Luftgapet x er mye mindre enn de andre dimensjonene på figuren. Anta at den relative permeabiliteten $\mu_r = \mu/\mu_0$ er mye større enn 1 (men ikke uendelig), slik at du kan anta at fluksen følger rundt den magnetiske kretsen.



Figur 2: Elektromagnet med strømkilde.

a) Finn den magnetiske flukstettheten $\mathbf{B}$ i luftgapene.

b) Vis at selvinduktansen til elektromagneten kan skrives

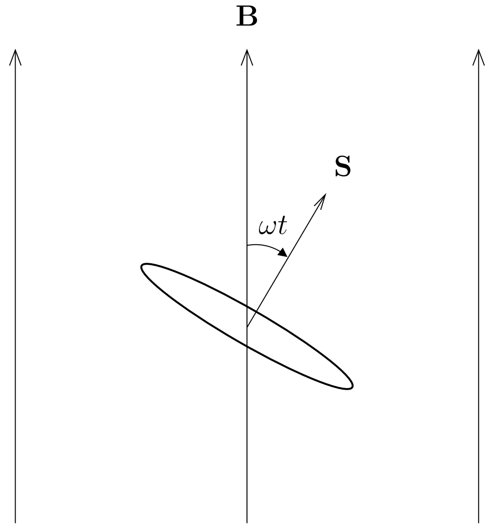
$$L = \frac{N^2}{\frac{\pi a + 2a}{\mu S} + \frac{2x}{\mu_0 S}}. \tag{2}$$

c) Anta nå at $\mu_r = \infty$. Finn den magnetiske energien til systemet ved å ta utgangspunkt i energitettheten $w_m = \frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$. Finn også kraften som virker på bjelken fra elektromagneten.

d) Legg merke til at hvis gapet x går mot null, så går kraften fra forrige deloppgave mot uendelig. Dette er ikke realistisk. Hva er problemet med analysen? Finn et mer realistisk resultat som også er gyldig når $x \to 0$.

Oppgave 3

En plan sløyfe med areal S roteres med vinkelhastighet ω i et uniformt felt $\mathbf{B}$. Rotasjonsaksen står normalt på $\mathbf{B}$, se fig. 3.



Figur 3: En sløyfe roteres med vinkelhastighet ω i et uniformt felt $\mathbf{B}$.

a) Til å begynne med antar vi at sløyfa har uendelig resistans. Finn den induserte elektromotoriske spenningen (emf'en) e i sløyfa.

b) Anta nå at sløyfa har endelig resistans R. Under hvilken forutsetning kan vi si at strømmen i sløyfa blir $I = e/R$, der e fortsatt er emf'en du fant i forrige delspørsmål? Vis at det er nødvendig at $(L/R)\omega \ll 1$.

c) Anta at forutsetningen fra forrige deloppgave er tilfredsstilt. Hva er det mekaniske momentet ("torque") $\mathbf{T}$ som virker på sløyfa, som funksjon av tiden? Hvordan kan du være sikker på at retningen du har fått er korrekt?

Oppgave 4

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.

Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, −1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

a) To punktladninger med samme absoluttverdi men *motsatt fortegn*, befinner seg en avstand fra hverandre. Det finnes ingen andre kilder til elektriske felter. Vi ser på det elektriske feltet $\mathbf{E}$, og potensialet V med uendelig som referanse, i et observasjonspunkt som er midt mellom ladningene. Hva er da rett?

i) $\mathbf{E} = 0$ og $V = 0$.

ii) $\mathbf{E} \neq 0$ og $V = 0$.

iii) $\mathbf{E} = 0$ og $V \neq 0$.

iv) Ingen av alternativene ovenfor er korrekte.

b) Gitt et stykke av et materiale med $\mu = \infty$ som er omgitt av vakuum. Det er ingen flatestrøm på overflaten av materialet. Hva kan du si om feltet i vakuum, rett utenfor materialet?

i) $\mathbf{H}$ står normalt på overflaten.

ii) $\mathbf{B}$ er parallell med overflaten.

iii) Verken $\mathbf{H}$ eller $\mathbf{B}$ står normalt på, eller er parallell med overflaten.

iv) Ingen av alternativene ovenfor er korrekte.

c) To kondensatorer, henholdsvis med kapasitans C_1 og C_2, er koblet sammen i serie. Seriekoblingen kan sees på som en kondensator med kapasitans C, der $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$. Dette gjelder under forutsetning av at

i) kondensatorene ikke har for stor kapasitans.

ii) kondensatorene ikke har for liten kapasitans.

iii) det ikke går feltlinjer fra den ene kondensatoren til den andre.

iv) det går feltlinjer fra den ene kondensatoren til den andre.

d) Hvilke to av Maxwells ligninger kan kombineres til å vise ladningsbevarelse?

i) Gauss' lov og Faradays lov.

ii) Ampere–Maxwells lov og Faradays lov.

iii) Loven $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ og Gauss' lov.

iv) Ampere–Maxwells lov og Gauss' lov.

e) En permanentmagnet faller raskt ned mot en plate av kobber. Kobber har relativ permabilitet $\mu_\mathrm{r} \approx 1$. Hva er rett?

i) Det vil ikke virke krefter mellom magneten og platen.

ii) Det vil induseres strømmer i kobberplaten slik at det blir frastøtende krefter.

iii) Det vil induseres strømmer i kobberplaten slik at det blir tiltrekkende krefter.

iv) Kobberplaten vil endre form til en kule, og så vil den rulle ned til havet og skremme bort all fisken der.

Formler i elektromagnetisme:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2}\hat{\mathbf{R}}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{F}/q, \qquad V_P = \int_P^{\text{ref}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{P} = \epsilon_0\chi_{\mathrm{e}}\mathbf{E}, \qquad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_{\mathrm{e}}), \qquad C = Q/V, \qquad C = \epsilon S/d, \qquad W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E},$$

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}, \qquad \mathbf{J} = NQ\mathbf{v}, \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \qquad P_{\mathrm{J}} = \int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B}, \qquad \mathbf{F} = Q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \qquad \mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mathbf{B},$$

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \qquad \mathbf{M} = \chi_{\mathrm{m}}\mathbf{H}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_{\mathrm{m}}),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_{\mathrm{m}})_{\text{uten kilder eller tap}}, \qquad \mathbf{F} = +(\nabla W_{\mathrm{m}})_{I=\text{konst}}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\mathbf{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J},$$

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\mathbf{r}', t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\mathbf{E}_{1\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2\mathrm{t}}, \qquad \mathbf{D}_{1\mathrm{n}} - \mathbf{D}_{2\mathrm{n}} = \rho_{\mathrm{s}}\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{H}_{1\mathrm{t}} - \mathbf{H}_{2\mathrm{t}} = \mathbf{J}_{\mathrm{s}}\times\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{B}_{1\mathrm{n}} = \mathbf{B}_{2\mathrm{n}}.$$

Konstanter:

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m

$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854\cdot 10^{-12}$ F/m

Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0\cdot 10^8$ m/s

Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

Elementærladningen: $e = 1.6\cdot 10^{-19}$ C

Elektronets hvilemasse: $m_{\mathrm{e}} = 9.11\cdot 10^{-31}$ kg

Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2

Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673\cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \text{ (x vilkårlig akse)}$$
$$\nabla(V + W) = \nabla V + \nabla W$$
$$\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$$
$$\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$$
$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$$
$$\nabla\cdot(V\mathbf{A}) = V\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla V$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}$$
$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$$
$$\nabla\times(V\mathbf{A}) = (\nabla V)\times\mathbf{A} + V\nabla\times\mathbf{A}$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$$
$$\nabla\cdot(\nabla V) = \nabla^2 V$$
$$\nabla\times(\nabla V) = 0$$
$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

Integralidentiteter:

$$\int_v \nabla V \mathrm{d}v = \oint_S V \mathrm{d}\mathbf{S}$$
$$\int_v \nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \text{(Divergensteoremet)}$$
$$\int_v \nabla\times\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{A}$$
$$\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right) + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

KANDIDATNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				