

Faglærer:
Johannes Skaar

EKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

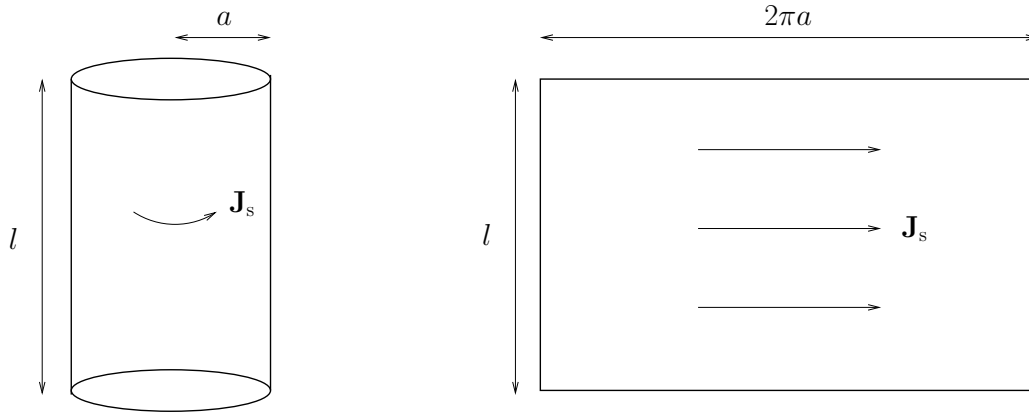
Fredag 15. august 2014

Oppgave 1

- a) Anta at en total ladning Q er jevnt fordelt utover en kule med radius a . Permittiviteten overalt er ϵ_0 . Finn det elektriske feltet overalt.
- b) Kula fra forrige oppgave plasseres inne i et kuleskall med radius b , der $b > a$. Kula og kuleskallet har sammenfallende sentrum. En ladning $-Q$ er jevnt fordelt utover kuleskallet. Du kan anta at kuleskallet har tilnærmet null tykkelse. Finn det elektriske feltet utenfor kuleskallet.
- c) Kula forskyves litt slik at kula og kuleskallet ikke lenger har sammenfallende sentrum. Kula er fortsatt helt inne i kuleskallet. Anta at ladningsfordelingen i kula og kuleskallet er som før. Blir det elektriske feltet utenfor kuleskallet null? Begrunn svaret.
- d) Kuleskallet byttes ut med et kuleskall laget av en ideell leder, men kuleskallets netto ladning er som før ($= -Q$). Posisjonen til kula og kuleskallet, samt ladningsfordelingen i kula, er som i forrige deloppgave. Blir det elektriske feltet utenfor kuleskallet null? Hvorfor/hvorfor ikke? Forklar både intuitivt og matematisk.
- e) Vi ser nå på akkurat samme situasjon som i forrige deloppgave, men vi lar det ledende kuleskallet ha null netto ladning. Blir det elektriske feltet utenfor kuleskallet null? Grunngi svaret. Skisser hvordan ladningen er fordelt på kuleskallet (du kan anta at det har en endelig tykkelse).

Oppgave 2

Et kjent eksperiment går ut på å slippe en magnet igjennom et ledende, ikke-magnetisk rør. Det viser seg at magneten bremses opp og går mye saktere igjennom røret enn et tilsvarende, ikke magnetisk legeme ville ha gjort. I denne oppgaven skal vi se nærmere på denne effekten.



Figur 1: Venstre: Et sylindrisk, ikke magnetisk, ledende rør. Høyre: Røret er klippet opp slik at det blir til et rektangel med høyde l og lengde $2\pi a$.

- a) Som en forberedelse ser vi først på en annen situasjon enn den som fins i figur 1, nemlig en tettviklet solenoide med radius a og høyde l . Solenoiden har N viklinger og fører strømmen I . Finn den magnetiske flukstettheten \mathbf{B} i solenoiden. Solenoiden er lang og tynn og du kan se bort ifra kanteffekter og feltet utenfor solenoiden. Anta $\mu = \mu_0$ overalt.
- b) Vi ser nå på lederrøret i figur 1, med radius a og høyde l . I oppgave b), c) og d) ser vi på røret separat, dvs. uten at en magnet faller igjennom det. Anta at det går en uniform flatestrømtetthet \mathbf{J}_s på overflaten av røret, normalt på sylinderens akse. Anta at permeabiliteten er μ_0 overalt. Vis at selvinduktansen til røret, sett på som én vikling, er

$$L = \frac{\mu_0 \pi a^2}{l}. \quad (1)$$

- c) Det går fortsatt en uniform flatestrømtetthet \mathbf{J}_s rundt røret. Hva blir resistansen R som strømmen $I = J_s l$ opplever på en rundtur? Du kan her tenke deg at røret klippes opp og brettes ut til et rektangel med høyde l og lengde $2\pi a$, og du måler resistansen over lengden $2\pi a$ (se fig. 1 til høyre). Anta at "rektangelet" har tykkelse d (normalt på papirplanet), og at flatestrømmen \mathbf{J}_s egentlig er en (volum-)strømtetthet \mathbf{J} som er fordelt over tykkelsen d . Dvs. $I = J_s l = J l d$.
- d) Hvis det ved $t = 0$ går en strøm $I_0 = J_s l$ rundt røret, vis at strømmen som funksjon av t for $t > 0$ blir

$$I(t) = I_0 \exp(-t/\tau), \quad (2)$$

der $\tau = L/R$. Finn tallsvar for tidskonstanten τ når $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ } \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ (kobber), $a = 1 \text{ cm}$, and $d = 1 \text{ mm}$.

- e) I denne deloppgaven regner vi grovt på situasjonen der magneten faller ned mot og igjennom røret langs rørets akse. Vi antar for enkelhets skyld at den magnetiske fluksen Φ er den samme hele veien igjennom røret.

Siden τ er så liten, vil strømmen som induseres av en liten bevegelse av magneten, fort forsvinne. Vi kan derfor neglisjere lagret energi i form av strøm rundt røret. Videre, siden magneten beveger seg ekstremt lite i løpet av tiden τ , vil vi kunne se bort fra selvinduktansen L når vi skal regne ut strømmen som induseres av magnetens bevegelse.

Anta at magneten faller ned et lite stykke dz mot røret og dermed endrer fluksen med $d\Phi$. Hva blir strømmen I under denne bevegelsen? Hvor fort kommer magneten til å falle nedover? Du kan uttrykke svarene ved $d\Phi/dz$.

- f) For å få mest mulig oppbremsing, bør man velge kobber (slik vi har gjort her) eller et materiale med dårligere ledningsevne? Hva skjer hvis vi hadde valgt en superleder? Se for deg at magneten detter nedover mot røret langs rørets akse.

Oppgave 3

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.

Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, -1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

- a) To kondensatorer, henholdsvis med kapasitans C_1 og C_2 , er koblet sammen i *parallel*. Parallellkoblingen kan sees på som en kondensator med kapasitans C , der $C = C_1 + C_2$. Dette gjelder bare under forutsetning av at
- kondensatorene ikke har for stor kapasitans.
 - kondensatorene ikke har for liten kapasitans.
 - det ikke går feltlinjer fra den ene kondensatoren til den andre.
 - Ingen av alternativene ovenfor er korrekte.
- b) Hvilket/hvilke av følgende medier er isotropt/isotrope?
- Vann.
 - Luft.
 - Glass.
 - Alle mediene vann, luft og glass er isotrope.
- c) Hvilke to av Maxwells ligninger blir automatisk tilfredsstilt av definisjonen av Lorentz-potensialene ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ og $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$)?
- $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ og Ampere–Maxwells lov.
 - $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ og Gauss' lov.
 - $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ og Faradays lov.
 - Alle Maxwells ligninger blir automatisk tilfredsstilt av disse definisjonene.

- d) n ledninger er koblet sammen på en liten lederkule. Vi kaller strømmene i hver av ledningene ut fra kula for I_i . Da gjelder $\sum_{i=1}^n I_i = 0$ under forutsetning av at
- i) alle potensialene er null.
 - ii) det ikke netto akkumuleres eller forsvinner ladning i/fra koblingspunktet.
 - iii) alle ledningene er ideelle.
 - iv) Det trengs ingen forutsetninger for dette.
- e) På en orienteringsløp ved Baklidammen i Bymarka er siste post plassert ved en grop. Du legger merke til at kompasset viser helt motsatt av det det skal (nordpila peker mot sør). Hva kan årsaken være?
- i) Det er magnetiske mineraler/stoffer i grunnen.
 - ii) Det er en høyspentlinje/strømledning i nærheten.
 - iii) Kompasset ditt er blitt statisk elektrisk og blir tiltrukket av trøya di.
 - iv) Du har bomma – du er egentlig ved Geitfjellet og har funnet en post som tilhører et annet arrangement.

Formler i elektromagnetisme:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2} \hat{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{F}/q, \quad V_P = \int_P^{\text{ref}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \quad \mathbf{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e), \quad C = Q/V, \quad C = \epsilon S/d, \quad W_e = \frac{1}{2} CV^2, \quad w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E},$$

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}, \quad \mathbf{J} = NQ\mathbf{v}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad P_J = \int_v \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv,$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2}, \quad d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B},$$

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mu = \mu_0(1 + \chi_m),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}, \quad w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \quad L = \frac{\Phi}{I}, \quad W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_{jk} I_j I_k,$$

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_m)_{\text{uten kilder eller tap}}, \quad \mathbf{F} = +(\nabla W_m)_{I=\text{konst}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Maxwells likninger:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad e = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J},$$

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_v \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c) dv'}{R}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - R/c) dv'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}, \quad \mathbf{D}_{1n} - \mathbf{D}_{2n} = \rho_s \hat{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{H}_{1t} - \mathbf{H}_{2t} = \mathbf{J}_s \times \hat{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}.$$

Konstanter:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

$$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\text{Lyshastighet i vakuum: } c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 299792458 \text{ m/s} \approx 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\text{Lyshastighet i et medium: } c = 1/\sqrt{\mu \epsilon}$$

$$\text{Elementærladningen: } e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{Elektronets hvilemasse: } m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\text{Standard tyngdeakselerasjon: } g = 9.80665 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Gravitasjonskonstant: } \gamma = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

Differensielle vektoridentiteter:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} \quad (x \text{ vilkårlig akse}) \\ \nabla(V+W) &= \nabla V + \nabla W \\ \nabla(VW) &= V\nabla W + W\nabla V \\ \nabla f(V) &= f'(V)\nabla V \\ \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \\ &\quad + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ \nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \\ \nabla \cdot (V\mathbf{A}) &= V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V \\ \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \\ \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \\ \nabla \times (V\mathbf{A}) &= (\nabla V) \times \mathbf{A} + V\nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla V) &= \nabla^2 V \\ \nabla \times (\nabla V) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \end{aligned}$$

Integralidentiteter:

$$\begin{aligned} \int_v \nabla V dv &= \oint_S V d\mathbf{S} \\ \int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv &= \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{Divergensteoremet}) \\ \int_v \nabla \times \mathbf{A} dv &= \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \\ \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{Stokes' teorem}) \end{aligned}$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \\ &\quad + \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ \nabla^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= (\nabla^2 A_x) \hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y) \hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \\ &\quad + \hat{\phi} \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \\ \nabla^2 V &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + \frac{\hat{\theta}}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{\hat{\phi}}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \\ \nabla^2 V &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

KANDIDATNR.:

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				