Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

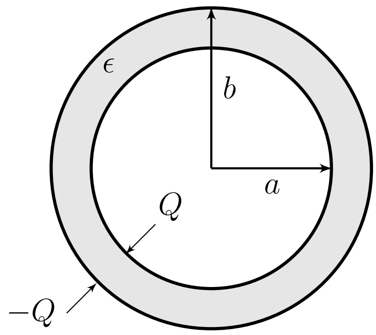
Faglærer:
Johannes Skaar

KONTINUASJONSEKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

Torsdag 15. august 2013

Oppgave 1

En kulekondensator består av to elektrisk ledende, konsentriske kuleskall med radius hhv. a og b. Volumet mellom de to lederne (grått område på figuren) er fylt med et dielektrisk medium med permittivitet ϵ.



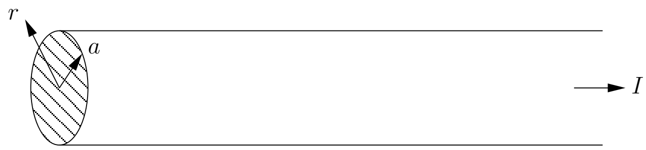
Figur 1: Tverrsnitt av en kulekondensator.

a) Finn kapasitansen til en slik kondensator.

b) Kontroller svaret i **a)** ved å vise at kapasitansen blir som for en parallellplate-kondensator når sjiktet mellom lederne blir veldig tynt, dvs. $d = b - a \ll a$.

Oppgave 2

En uendelig lang sylindrisk leder fører den konstante strømmen I, som er jevnt fordelt over tverrsnittet (se fig. 2).



Figur 2: En lang, sylindrisk leder.

a) Overalt i rommet er permeabiliteten μ_0. Finn den magnetiske flukstettheten $\mathbf{B}$ overalt.

b) Dersom antall frie elektroner per volumenhet i lederen er N, finn elektronenes gjennomsnittlige driftshastighet. Finn tallsvar når $I = 10\text{A}$, $a = 1\text{mm}$ og lederen er laget av kobber med $N = 8.45 \cdot 10^{28}\text{m}^{-3}$.

c) Vis at den (gjennomsnittlige) magnetiske kraften som virker på de frie elektronene, er

$$F = \frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 a^4 N}. \tag{1}$$

Hvilken retning har kraften?

d) Strømmen I er konstant (har stått på i all evighet). Forklar at det (i hvert fall i prinsippet) finnes en elektrisk kraft som balanserer den magnetiske kraften, slik at summen av kreftene på elektronene blir null. Hva er det som skaper dette elektriske feltet?

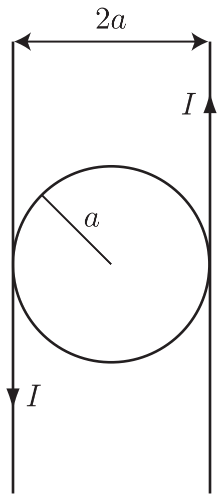
e) Det elektriske feltet betyr at det er en potensialforskjell mellom sentrum av lederen og utsiden. Finn et uttrykk for denne. Finn også tallsvar (bruk tallverdiene fra b).

f) Spenningen i forrige delspørsmål er meget svak. Forklar hvordan man kan endre forsøket slik at spenningen blir mye større og dermed målbar.

Oppgave 3

a) To uendelig lange, rette ledere med avstand $2a$, fører strømmen I i hver sin retning (se fig. 3). Vi tenker oss at disse er en del av en krets med kilde og last uendelig langt borte i hver retning. En sirkulær, ledende ring med radius a ligger i samme plan som de rette lederne og er isolert fra disse. Anta permeabiliteten μ_0 overalt. Finn den magnetiske flukstettheten $\mathbf{B}$ pga. strømmen I i de rette lederne. Se bare på observasjonspunkter som er mellom de rette lederne.

b) Bestem den gjensidige induktansen mellom den sirkulære lederen og de to rette lederne.



Figur 3: To uendelig lange, rette ledere, og en sirkulær sløyfe.

Oppgave 4

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

a) Hva impliserer loven $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$?

i) Et tidsavhengig **B**-felt gir en sirkulasjon av **E**-feltet.

ii) Det induseres en emf i en sløyfe dersom fluksen (gjennom et areal som omsluttes av sløyfa) er tidsavhengig.

iii) Det elektriske feltet er konservativt i elektrostatikken.

iv) Alle alternativene ovenfor.

b) En ladet ring roterer rundt sin akse med vinkelhastighet ω. Hva er **B**-feltet i sentrum av ringen? Ringen har en ladning Q som er jevnt fordelt over ringen. Ringens radius er a og permeabiliteten er μ_0 overalt.

i) $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q\omega}{4\pi a^2}\hat{\mathbf{z}}$.

ii) $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q\omega}{2a^2}\hat{\mathbf{z}}$.

iii) $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q\omega}{4\pi a}\hat{\mathbf{z}}$.

iv) ingen av alternativene ovenfor er korrekte.

c) P. Otensial hevder at det elektriske feltet på aksen til en disk med konstant flateladningstetthet ρ_s er gitt av uttrykket $\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}}$. Aksen til disken sammenfaller med z-aksen, og vi antar $z > 0$. Hvorfor kan du forklare P. Otensial at uttrykket hans må være galt?

i) Uttrykket har ikke rett dimensjon.

ii) Uttrykket har ikke den riktige grensen for $a \to \infty$.

iii) Uttrykket tilfredstiller ikke $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

iv) Alle alternativene ovenfor.

d) Hva er riktig grensebetingelse for vektorpotensialet $\mathbf{A}$? Her står "t" for tangensial-komponent.

i) $\mathbf{A}_{1\mathrm{t}} = \mathbf{A}_{2\mathrm{t}}$.

ii) $\mathbf{A}_{1\mathrm{t}} - \mathbf{A}_{2\mathrm{t}} = \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{n}}$.

iii) $\mathbf{A}_{1\mathrm{t}} - \mathbf{A}_{2\mathrm{t}} = \mathbf{B}$.

iv) $\mathbf{A}_{1\mathrm{t}} = \mathbf{A}_{2\mathrm{t}} = 0$.

e) Balle Ong har tre barn: Trine er født i januar, Truls er født i juni og Trulte er født i juli. Truls og Trulte er misunnelige på Trine, og sier: "Hvorfor får alltid Trine ballonger i taket på bursdagen sin, mens vi bare får ballonger på bordet?" Balle Ong husker tilbake til sin tid på NTNU, og svarer diplomatisk:

i) "Det er mye fuktigere innendørs på sommeren enn på vinteren, og vannet i lufta gjør at det er vanskelig å få ballongene til være ladd og dermed sitte i taket."

ii) "Det er mye fuktigere innendørs på sommeren enn på vinteren. Ballongene trekker til seg fuktighet og blir så tunge at de faller ned."

iii) "Nå er jeg lei av at dere alltid skal være så misunnelige på Trine."

iv) "Jeg liker Trine bedre enn dere, så jeg prøver å gjøre bursdagsfeiringen hennes ekstra flott."

Formler i elektromagnetisme:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2}\hat{\mathbf{R}}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{F}/q, \qquad V_P = \int_P^{\text{ref}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{P} = \epsilon_0\chi_{\mathrm{e}}\mathbf{E}, \qquad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_{\mathrm{e}}), \qquad C = Q/V, \qquad C = \epsilon S/d, \qquad W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E},$$

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}, \qquad \mathbf{J} = NQ\mathbf{v}, \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \qquad P_{\mathrm{J}} = \int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B}, \qquad \mathbf{F} = Q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \qquad \mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mathbf{B},$$

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \qquad \mathbf{M} = \chi_{\mathrm{m}}\mathbf{H}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_{\mathrm{m}}),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_{\mathrm{m}})_{\text{uten kilder eller tap}}, \qquad \mathbf{F} = +(\nabla W_{\mathrm{m}})_{I=\text{konst}}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\mathbf{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J},$$

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\mathbf{r}', t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\mathbf{E}_{1\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2\mathrm{t}}, \qquad \mathbf{D}_{1\mathrm{n}} - \mathbf{D}_{2\mathrm{n}} = \rho_{\mathrm{s}}\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{H}_{1\mathrm{t}} - \mathbf{H}_{2\mathrm{t}} = \mathbf{J}_s\times\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{B}_{1\mathrm{n}} = \mathbf{B}_{2\mathrm{n}}.$$

Konstanter:

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m

$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854\cdot 10^{-12}$ F/m

Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0\cdot 10^8$ m/s

Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

Elementærladningen: $e = 1.6\cdot 10^{-19}$ C

Elektronets hvilemasse: $m_{\mathrm{e}} = 9.11\cdot 10^{-31}$ kg

Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2

Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673\cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}\cdot\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} \text{ (x vilkårlig akse)}\\
\nabla(V+W) &= \nabla V + \nabla W\\
\nabla(VW) &= V\nabla W + W\nabla V\\
\nabla f(V) &= f'(V)\nabla V\\
\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}\\
&\quad + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})\\
\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}\\
\nabla\cdot(V\mathbf{A}) &= V\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla V\\
\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}\\
\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}\\
\nabla\times(V\mathbf{A}) &= (\nabla V)\times\mathbf{A} + V\nabla\times\mathbf{A}\\
\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) &= 0\\
\nabla\cdot(\nabla V) &= \nabla^2 V\\
\nabla\times(\nabla V) &= 0\\
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}
\end{aligned}$$

Integralidentiteter:

$$\begin{aligned}
\int_v \nabla V \mathrm{d}v &= \oint_S V\mathrm{d}\mathbf{S}\\
\int_v \nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}v &= \oint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \text{(Divergensteoremet)}\\
\int_v \nabla\times\mathbf{A}\mathrm{d}v &= \oint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{A}\\
\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} &= \oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}
\end{aligned}$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\\
&+ \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\\
&+ \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r}\\
&+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\\
&+ \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\\
&+ \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)\\
&+ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)\\
&+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}
\end{aligned}$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

KANDIDATNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				