Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Bokmål/Nynorsk

Faglig/fagleg kontakt under eksamen:
Johannes Skaar (48497352)

Hjelpemidler:
C - Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt:
Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.
Hjelpemiddel:
C - Spesifiserte trykte og handskrevne hjelpemiddel tillate:
Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillaten.

EKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

Tirsdag 5. juni 2012
Tid: 09:00 – 13:00   Sensur: 26. juni 2012

Oppgave 1

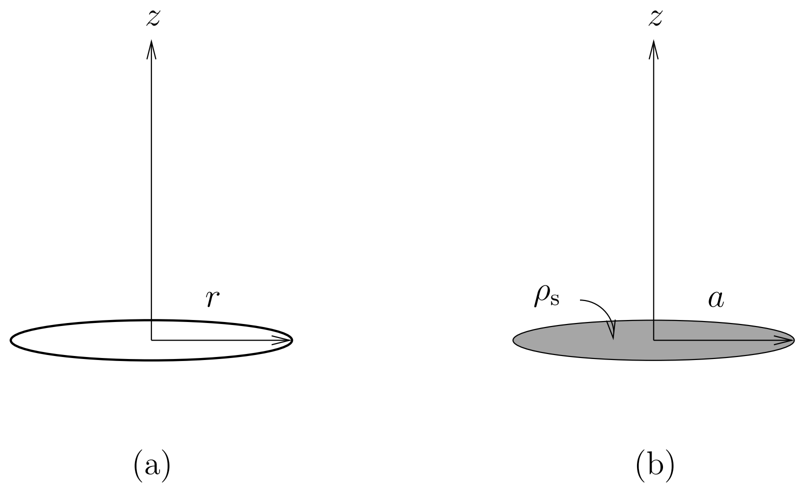
a) En ring med radius r er plassert i xy-planet, med sentrum i origo, se fig. 1(a). Den totale ladningen til ringen er Q; denne ladningen er jevnt fordelt over ringen slik at ladning per lengdeenhet er konstant. Anta vakuum overalt rundt ringen. Finn potensialet langs z-aksen. La referansepunktet være i uendeligheten.

b) En disk med radius a er plassert i xy-planet, med sentrum i origo, se fig. 1(b). Disken har konstant flateladningstetthet ρ_s. Vis at potensialet langs z-aksen og for $z > 0$ er

$$V(z) = \frac{\rho_\mathrm{s}}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{z^2+a^2} - z\right). \tag{1}$$

c) Finn det elektriske feltet på z-aksen (og for $z > 0$) for disken i forrige deloppgave.

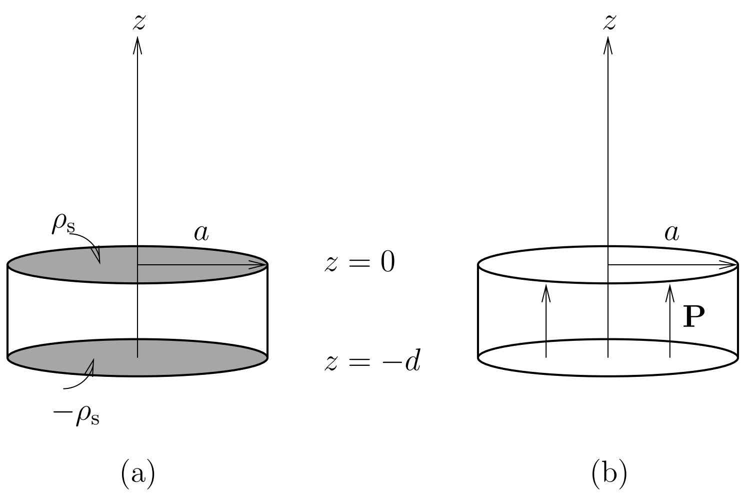
d) For disken i forrige spørsmål, hva blir det elektriske feltet langs z-aksen for $z \ll a$? Finn også det elektriske feltet langs z-aksen når $z \gg a$. Tolk resultatene.



Figur 1: (a) En ladet ring med radius r. (b) En ladet disk med radius a og flateladningstetthet ρ_s.

e) Vi beholder disken fra b)-d). I tillegg setter vi en disk med flateladningstetthet $-\rho_s$ parallelt med den første, men sentrert i $x = y = 0$ og $z = -d$, se fig. 2(a). De to diskene har samme radius a. Finn det elektriske feltet på z-aksen for $z > 0$.

f) Ta vekk de to diskene, og plassér i stedet en sylinder med z-aksen som akse, og de to endeflatene i $z = 0$ og $z = -d$, se fig. 2(b). Sylinderen har radius a og en uniform polariseringstetthet $\mathbf{P} = P\hat{\mathbf{z}}$. Forklar hvordan du kan bruke resultatet i e) til å finne det elektriske feltet på z-aksen for $z > 0$.

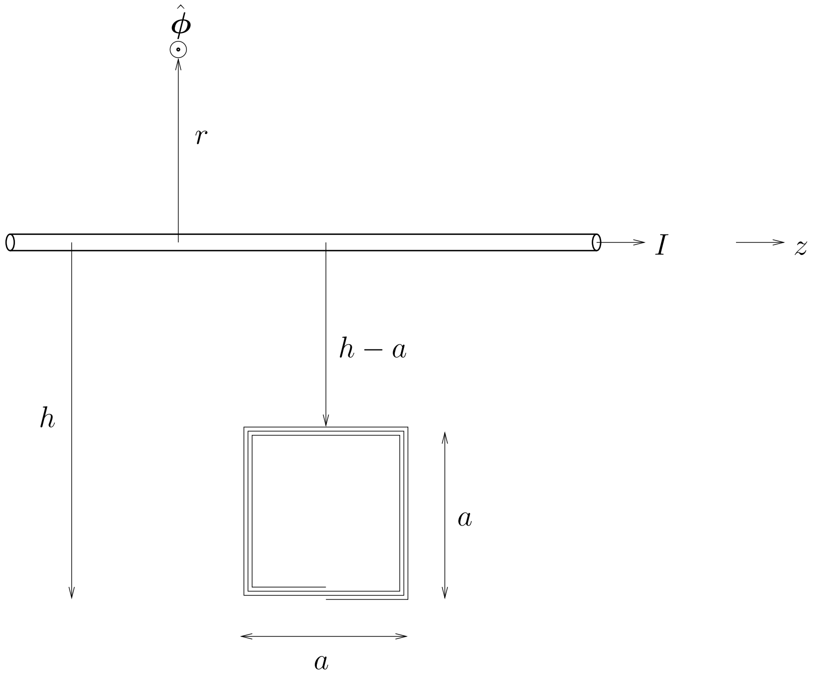


Figur 2: (a) To disker med hhv. flateladningstetthet ρ_s og $-\rho_s$. (b) En sylinder med uniform polariseringstetthet $\mathbf{P}$.

Oppgave 2

Det fortelles at en bonde stjal elektrisitet ved å plassere en stor spole under kraftlinja som gikk over eiendommen. Han fikk på denne måten gratis strøm til husene på gården. Etter en stund ble tyveriet oppdaget, og bonden ble dømt på tross av at han ikke hadde installert noe utstyr i fysisk kontakt med kraftlinjene. I løpet av denne oppgaven vurderes det hvorvidt denne historien kan være sann.

a) Forklart *kort* prinsippene som angivelig må ha blitt utnyttet av bonden. Hva heter de relevante elektromagnetiske lovene som beskriver dette?



Figur 3: En enkel høyspentkabel og en kvadratisk spole med sidekant a.

b) Vi ser kun på én kraftlinje, se fig. 3, dvs. vi neglisjerer bidraget fra returstrømmen (som går i to andre ledere). Kraftlinje-lederen kan antas sylindrisk, rett og uendelig lang. Lederen fører strømmen I, som også kan antas sylindersymmetrisk fordelt. Finn den magnetiske flukstettheten $\mathbf{B}$ overalt utenfor lederen. Anta luft med permittivitet ϵ_0 og permeabilitet μ_0 overalt rundt lederen.

c) Anta at bondens spole har N viklinger, alle med tilnærmet samme kvadratiske form og sidekant a. Dersom spolen skal stå på bakken, forklar hvorfor bonden bør plassere og orientere spolen som vist i fig. 3 for å få størst mulig indusert spenning. I resten av oppgaven antar vi at spolen er plassert slik.

d) Kraftlinjen befinner seg en høyde h over bakken og fører en vekselstrøm med amplitude I_0 og frekvens f. Spolen er koblet til et voltmeter med uendelig resistans. Finn den gjensidige induktansen mellom kraftlinjen og bondens spole. Finn også amplituden til den induserte emf'en i spolen. Vis at spolen må ha ca. 1500 viklinger for å få indusert en emf med amplitude $\sqrt{2} \cdot 230\text{V} = 325\text{V}$. Her antar vi tallverdiene $a = 5\text{m}$, $h = 10\text{m}$, $I_0 = 1000\text{A}$ og $f = 50\text{Hz}$.

e) Spolen kobles nå til en lyspære som bruker effekten $P = 100\text{W}$ når den kobles til en ideell 230V vekselspenningskilde. Lyspæren utgjør altså en last med resistans $R = V^2/P = 529\Omega$. For at tapet i selve spolen ikke skal bli for stort, bør derfor resistansen i spoletråden også være maksimalt lik R. Regn ut hva tverrsnittsarealet til spoletråden minst må være for å få til dette. Spoletråden lages av kobber, med konduktivitet $\sigma = 6 \cdot 10^7 \frac{1}{\Omega\text{m}}$. Du kan anta at strømmen er jevnt fordelt over tverrsnittet til lederen.

Dersom denne typen spoletråd koster 3 kr/meter, og 1kWh (kilowatt-time) koster 1 kr dersom den kjøpes på lovlig vis, hvor mange år må bonden bruke anordningen før det begynner å lønne seg? Anta at effekten som leveres til lyspæren er 50W.

f) Vi har i denne oppgaven neglisjert returstrømmen i kraftlinjen (de to andre lederne), og dessuten selvinduktansen til bondens spole. Hvis vi hadde tatt disse aspektene med i analysen, forklar *kort* hvorfor effekten overført til bonden bare blir enda mindre.

Oppgave 3

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

a) Hva betyr $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$?

i) At $\mathbf{B}$ ikke kan øke eller minke.

ii) At $\mathbf{B}$-feltlinjene biter seg selv i halen.

iii) At $\mathbf{B}$-feltlinjene ikke sirkulerer.

iv) Alle alternativene ovenfor.

b) Magne Trond mener bestemt at den magnetiske flukstettheten $\mathbf{B}$ fra en kabel er gitt av

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\phi}}, \tag{2}$$

i et sylindrisk koordinatsystem. Hvordan kan du være sikker på at Magne Trond tar feil?

i) Uttrykket tilfredsstiller ikke $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

ii) Uttrykket tilfredsstiller ikke grensebetingelsene i $r = \infty$.

iii) Uttrykket har gal dimensjon.

iv) Alle alternativene ovenfor.

c) Lorentzpotensialet V i vakuum kan skrives

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c_0)\mathrm{d}v'}{R}, \tag{3}$$

der $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Denne ligningen impliserer at

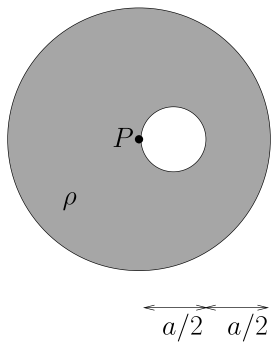
i) dersom en ladning begynner å flytte på seg ved tiden $t = 0$, vil ikke potensialet ved observasjonspunktet påvirkes før etter en tid R/c_0, der R er avstanden mellom ladningen og observasjonspunktet ved $t = 0$.

ii) $\nabla^2 V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

iii) dersom vi har elektrostatiske forhold, så er $V = \int_v \frac{\rho \mathrm{d}v}{4\pi\epsilon_0 R}$.

iv) alle alternativene ovenfor er korrekte.

d) I en uendelig lang sylinder med radius a er det et hull med radius $a/4$, se fig. 4. Sylinderen har en jevnt fordelt ladning med romladningstetthet ρ, bortsettfra i hullet der romladningstettheten er null. Hva er det elektriske feltet i punktet P, dvs. på aksen til sylinderen?



Figur 4: Ladet sylinder med hull.

i) $\frac{\rho a}{4\epsilon_0}$ rettet mot venstre.

ii) $\frac{\rho a}{4\epsilon_0}$ rettet mot høyre.

iii) $\frac{\rho a}{8\epsilon_0}$ rettet mot høyre.

iv) ingen av alternativene ovenfor er korrekte.

e) Hvilke to av Maxwells ligninger kan vi kombinere og dermed få at $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$?

i) Gauss' lov og Ampere–Maxwells lov.

ii) Ampere–Maxwells lov og Faradays lov.

iii) Faradays lov og Gauss' lov.

iv) Gaus' lov og Roms' og Brumunds lov.

Formler i elektromagnetisme:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2}\hat{\mathbf{R}}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{F}/q, \qquad V_P = \int_P^{\text{ref}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{dl}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{P} = \epsilon_0\chi_{\text{e}}\mathbf{E}, \qquad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_{\text{e}}), \qquad C = Q/V, \qquad C = \epsilon S/d, \qquad W_{\text{e}} = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_{\text{e}} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E},$$

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}, \qquad \mathbf{J} = NQ\mathbf{v}, \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \qquad P_{\text{J}} = \int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{dl}\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{dl}\times\mathbf{B}, \qquad \mathbf{F} = Q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \qquad \mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mathbf{B},$$

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \qquad \mathbf{M} = \chi_{\text{m}}\mathbf{H}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_{\text{m}}),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{dl} = \int_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad w_{\text{m}} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_{\text{m}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_{\text{m}})_{\text{uten kilder eller tap}}, \qquad \mathbf{F} = +(\nabla W_{\text{m}})_{I=\text{konst}}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{E}\cdot\mathrm{dl} = -\int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{dl} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\mathbf{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J},$$

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\mathbf{E}_{1\text{t}} = \mathbf{E}_{2\text{t}}, \qquad \mathbf{D}_{1\text{n}} - \mathbf{D}_{2\text{n}} = \rho_{\text{s}}\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{H}_{1\text{t}} - \mathbf{H}_{2\text{t}} = \mathbf{J}_s\times\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{B}_{1\text{n}} = \mathbf{B}_{2\text{n}}.$$

Konstanter:

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m

$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854\cdot 10^{-12}$ F/m

Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0\cdot 10^8$ m/s

Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

Elementærladningen: $e = 1.6\cdot 10^{-19}$ C

Elektronets hvilemasse: $m_{\text{e}} = 9.11\cdot 10^{-31}$ kg

Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2

Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673\cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} \text{ (x vilkårlig akse)} \\
\nabla(V+W) &= \nabla V + \nabla W \\
\nabla(VW) &= V\nabla W + W\nabla V \\
\nabla f(V) &= f'(V)\nabla V \\
\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} \\
&\quad + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \\
\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B} \\
\nabla\cdot(V\mathbf{A}) &= V\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla V \\
\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B} \\
\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B} \\
\nabla\times(V\mathbf{A}) &= (\nabla V)\times\mathbf{A} + V\nabla\times\mathbf{A} \\
\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) &= 0 \\
\nabla\cdot(\nabla V) &= \nabla^2 V \\
\nabla\times(\nabla V) &= 0 \\
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}
\end{aligned}
$$

Integralidentiteter:

$$
\begin{aligned}
&\int_v \nabla V \mathrm{d}v = \oint_S V \mathrm{d}\mathbf{S} \\
&\int_v \nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \text{(Divergensteoremet)} \\
&\int_v \nabla\times\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{A} \\
&\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}
\end{aligned}
$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \\
&+ \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) \\
&+ \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)
\end{aligned}
$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} \\
&+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right) \\
&+ \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right) \\
&+ \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) \\
&+ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) \\
&+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}
\end{aligned}
$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

STUDENTNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				