Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Bokmål/Nynorsk

Faglig/fagleg kontakt under eksamen:
Johannes Skaar (48497352)

Hjelpemidler:
C - Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt:
Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.
Hjelpemiddel:
C - Spesifiserte trykte og handskrevne hjelpemiddel tillate:
Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillaten.

EKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

Tirsdag 24. mai 2011
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur: 16. juni 2011

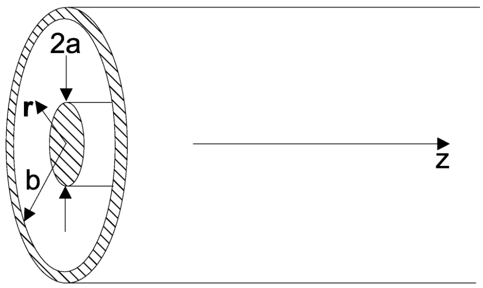
Oppgave 1

En koaksialkabel består av en innerleder med radius a og en ytterleder med indre radius b, se fig. 1. Anta at lederne er ideelle og at kabelen er netto uladet. I hele oppgaven holdes potensialet på innerlederen konstant lik V_0, mens potensialet på ytterlederen er $V = 0$. Kabelens lengde l er mye større enn b.

a) Mellom lederne befinner det seg et dielektrisk medium med permittivitet $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ overalt.

b) Finn potensialet overalt.

c) Finn kapasitansen per lengdeenhet.



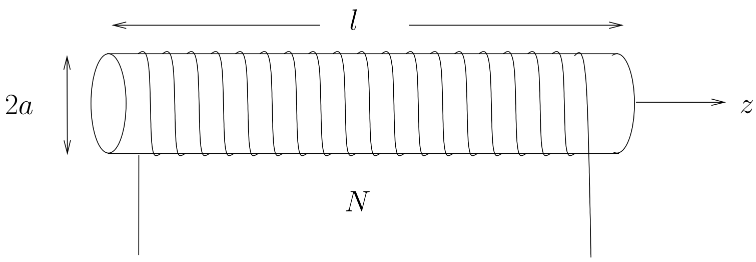
Figur 1: Koaksialkabel.

d) Det dielektriske mediet mellom lederne erstattes av et medium med permanent polarisering $\vec{P} = P\vec{u}_r$, som er uavhengig av det elektriske feltet. Her er P en kjent konstant (altså uavhengig av r, ϕ og z), og $\vec{u}_r$ er enhetsvektor i r-retning. Potensialet på inner- og ytterlederen holdes konstant lik henholdsvis V_0 og 0. Hva blir nå det elektriske feltet?

Oppgave 2

a) Hva er definisjonen på selvinduktans? Forklar kort hva størrelsene som inngår representerer.

b) Finn selvinduktansen til en solenoide (sylinder med tettviklet spole) med N viklinger, lengde l og radius a, se fig. 2. Permeabiliteten er μ_0 overalt. Anta at solenoiden er lang og tynn slik at du kan neglisjere det magnetiske feltet utenfor solenoiden.



Figur 2: Solenoide.

c) Bruk Faradays lov og definisjonen på selvinduktans til å vise kretslikningen

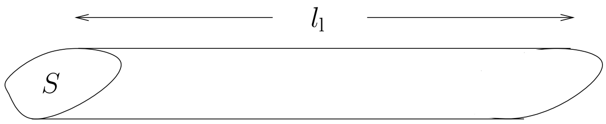
$$V = L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Her er i strømmen gjennom spolen, V er spenningen over spolen og L er selvinduktansen. Hvorfor gnistrer det når du trekker ut kontakten til en støvsuger?

d) Vi ser nå på en rett leder med lengde l_1 og konstant tverrsnitt, tverrsnittsareal S, se fig. 3. Lederen er laget av et materiale med konstant konduktivitet σ. Vis at resistansen til lederen er

$$R = \frac{l_1}{\sigma S}. \tag{2}$$

Du kan anta at strømmen er jevnt fordelt over tverrsnittet.



Figur 3: Lang, rett leder.

e) Vi skal nå se at en leder har en viss selvinduktans pga. massen til elektronene. I denne deloppgaven kan du anta at ledningselektronene flyter helt fritt ($\sigma = \infty$). Bruk (1) til å vise at

$$L = \frac{m_e l_1}{N_e e^2 S}, \tag{3}$$

for en leder med geometri som i forrige deloppgave. Her er m_e massen og e ladningen til elektronet, og N_e er antall ledningselektroner per volumenhet av lederen. Du kan fortsatt anta at strømmen er jevnt fordelt over tverrsnittet, og at feltet $\vec{E}$ er det samme overalt i lederen.

f) Anta at solenoiden i oppg. a) har totalinduktans $L = L_\mathrm{s} + L_\mathrm{e}$, der L_s er selvinduktansen fra a) og L_e er selvinduktansen fra e) pga. elektronenes masse.[1] Vi ønsker å krympe alle fysiske dimensjoner med den samme faktoren. Forklar hvorfor L_s dominerer ved store dimensjoner, mens L_e dominerer ved små dimensjoner.

g) For lederen i fig. 3, finn et estimat på hvor stor frekvensen må være for at induktansen pga. elektronenes masse kan bli en begrensende faktor. Anta at lederen kan sees på som en resistans og en induktans i serie, gitt av henholdsvis (2) og (3). Finn tallsvar for kobber med $N_e = 8.5 \cdot 10^{28}$ m^{-3} og konduktivitet $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ m$^{-1}\Omega^{-1}$.

Oppgitt: "Tregheten" til en induktans L i serie med en resistans R, er gitt av tidskonstanten $\tau = L/R$. Tallverdier for e og m_e er oppgitt i vedlegg. Hvis du ikke har kalkulator kan du avrunde alle tall til nærmeste tierpotens. Svaret kommer til å bli en meget høy frekvens som ligger i den infrarøde delen av det elektromagnetiske spekteret.

[1] Resultatet i e) var riktignok utledet for en rett leder, og nå er lederen viklet rundt solenoiden. Men når lederens tykkelse er mye mindre enn solenoidens radius a vil resultatet (3) for den masserelaterte delen av induktansen fortsatt gjelde med god nøyaktighet.

Oppgave 3

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

a) Tre like punktladninger Q i vakuum er plassert på hjørnene til en likesidet trekant med sidekant a. Hva kraften som virker på en av ladningene?

- i) $\sqrt{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}$,
- ii) $\sqrt{2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$,
- iii) $\sqrt{3}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}$,
- iv) $(\sqrt{2}+1)\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}$.

b) I forrige deloppgave tar vi bort ladningen på det ene hjørnet. Hva blir potensialet i dette punktet dersom referansen settes i uendeligheten?

- i) $(\sqrt{2}+1)\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$,
- ii) $\sqrt{2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$,
- iii) $2\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$,
- iv) $(\sqrt{2}+2)\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$.

c) Det magnetiske feltet overalt i rommet er gitt av uttrykket

$$\vec{H}(r) = \begin{cases} C_1 r^3 \vec{u}_\phi, & \text{for } r < a, \\ C_2 \frac{1}{r} \vec{u}_\phi, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{4}$$

i et sylindrisk koordinatsystem. Her er C_1 en vilkårlig konstant, og $C_2 = C_1 a^4$. Anta statiske forhold, og at permeabiliteten er μ_0 overalt. Da kan vi si at

- i) $\vec{J} = 3C_1 r \vec{u}_z$ for $r < a$ og $\vec{J} = 0$ ellers,
- ii) $\vec{J} = 3\mu_0 C_1 r \vec{u}_z$ for $r < a$ og $\vec{J} = 0$ ellers,
- iii) $\vec{J} = 4C_1 r^2 \vec{u}_z$ for $r < a$ og $\vec{J} = 0$ ellers,
- iv) Ingen av alternativene ovenfor.

d) Den magnetiske flukstettheten $\vec{B}$ overalt i rommet er gitt av uttrykket

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} C_1 r^3 \vec{u}_r, & \text{for } r < a, \\ C_2 \frac{1}{r} \vec{u}_r, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{5}$$

i et sylindrisk koordinatsystem. Her er C_1 en vilkårlig konstant, og $C_2 = C_1 a^4$. Anta at permeabiliteten er μ_0 overalt. Da kan vi si at

i) $\vec{J} = 0$ overalt,

ii) $\vec{J} \neq 0$ for $r < a$ og $\vec{J} = 0$ ellers,

iii) $\vec{J} \neq 0$ overalt,

iv) Dette er en ufysisk situasjon som ikke kan oppstå ifølge Maxwells likninger.

e) Prof. E. Lektrisk påstår at det elektriske feltet $\vec{E}$ fra en gitt, tidsuavhengig ladningsfordeling i vakuum er gitt av uttrykket

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_\phi, \tag{6}$$

i et sfærisk koordinatsystem. Her er ρ en romladningstetthet. Det er gitt at ρ er konstant og $\rho \neq 0$ for $r < a$, der $a > 0$. Hvordan kan du være sikker på at prof. Lektrisk er helt på jordet?

i) Uttrykket har ikke riktig dimensjon,

ii) Feltet er ikke curlfritt (dvs. det sirkulerer),

iii) For $0 < r < a$ er $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, hvilket skulle bety at $\rho = 0$ der. Dette stemmer ikke med at $\rho \neq 0$ for $r < a$,

iv) Alle alternativene ovenfor.

f) Sett at det fantes magnetiske monopoler (magnetisk "ladning"). På samme måte som for elektrisk ladning, skal vi ha ladningsbevarelse for magnetisk "ladning". Hvordan ville da Maxwells likninger sett ut? (Vi kaller den magnetiske romladningstettheten ρ_m og den magnetiske strømtettheten $\vec{J}_m$.)

i) $\nabla \times \vec{E} = \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, $\nabla \cdot \vec{B} = \rho_m$,

ii) $\nabla \times \vec{E} = -\vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, $\nabla \cdot \vec{B} = \rho_m$,

iii) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_m + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho + \rho_m$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

iv) De ville ikke sett ut: $\nabla \times \nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}$, $\vec{E} = 2\vec{H}$, $2 = 3$, $\pi = 1$.

Formler i elektromagnetisme:

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r, \qquad \vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q, \qquad V_P = \int_P^R \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, \qquad \vec{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho,$$

$$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}, \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E}, \qquad \epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e),$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} Q/V, \qquad C = \epsilon S/d,$$

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}, \qquad \vec{p} = Q\vec{d},$$

$$\vec{J} = NQ\vec{v}, \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \qquad \vec{J} = \vec{E}/\rho, \qquad \sigma = 1/\rho, \qquad P_J = \int_v \vec{J}\cdot\vec{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = I_2\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{u}_r}{r^2}\right), \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{u}_r}{r^2}, \qquad \mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B},$$

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \qquad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_m), \qquad \vec{m} = I\vec{S},$$

$$\vec{M}_F = \vec{m}\times\vec{B}, \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \qquad w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\vec{F} = -(\nabla W_m)_{\Phi=\text{konst}}, \quad \vec{F} = +(\nabla W_m)_{I=\text{konst}}, \quad \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}).$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \quad \left(e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho, \qquad \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J},$$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\vec{E}_{1\text{ tang}} = \vec{E}_{2\text{ tang}}, \qquad \vec{D}_{1\text{ norm}} - \vec{D}_{2\text{ norm}} = \sigma\vec{n},$$

$$\vec{H}_{1\text{ tang}} - \vec{H}_{2\text{ tang}} = \vec{J}_s\times\vec{n}, \qquad \vec{B}_{1\text{ norm}} = \vec{B}_{2\text{ norm}}.$$

Konstanter:

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m
Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0 \cdot 10^8$ m/s
Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$
Elementærladningen: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2
Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$\vec{u}_x \cdot \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \text{ (x vilkårlig akse)}$$
$$\nabla(V+W) = \nabla V + \nabla W$$
$$\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$$
$$\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$$
$$\nabla \cdot (\vec{A}+\vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$$
$$\nabla(V\vec{A}) = V\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla V$$
$$\nabla \cdot (\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$$
$$\nabla \times (\vec{A}+\vec{B}) = \nabla\times\vec{A} + \nabla\times\vec{B}$$
$$\nabla \times (V\vec{A}) = (\nabla V)\times\vec{A} + V\nabla\times\vec{A}$$
$$\nabla \cdot (\nabla\times\vec{A}) = 0$$
$$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$$
$$\nabla \times (\nabla V) = 0$$
$$\nabla \times (\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

Integralidentiteter:

$$\int_v \nabla V \mathrm{d}v = \oint_S V \mathrm{d}\vec{S}$$
$$\int_v \nabla\cdot\vec{A}\mathrm{d}v = \oint_S \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \quad \text{(Divergensteoremet)}$$
$$\int_v \nabla\times\vec{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathrm{d}\vec{S}\times\vec{A}$$
$$\int_S \nabla\times\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_C \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$
$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\nabla\times\vec{A} = \vec{u}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{u}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$
$$+\vec{u}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$
$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$
$$\nabla^2\vec{A} = (\nabla^2 A_x)\vec{u}_x + (\nabla^2 A_y)\vec{u}_y + (\nabla^2 A_z)\vec{u}_z$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{u}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$
$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\nabla\times\vec{A} = \vec{u}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \vec{u}_\phi\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)$$
$$+\frac{\vec{u}_z}{r}\left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)$$
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{u}_\phi$$
$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$
$$\nabla\times\vec{A} = \frac{\vec{u}_r}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)$$
$$+\frac{\vec{u}_\theta}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right) + \frac{\vec{u}_\phi}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

STUDENTNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				
f)				