Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Bokmål/Nynorsk

Faglig/fagleg kontakt under eksamen:
Robert Marskar (48222091)

Hjelpemidler:
C - Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt:
Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.
Hjelpemiddel:
C - Spesifiserte trykte og handskrevne hjelpemiddel tillate:
Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillaten.

KONTINUASJONSEKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

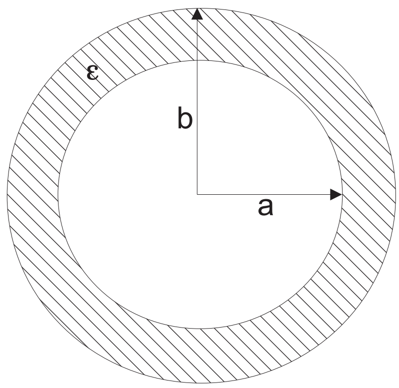
Torsdag 11. aug. 2011
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur: 1. sept. 2011

Oppgave 1

a) En kulekondensator består av to ideelt ledende, konsentriske kuleskall med radius henholdsvis lik a og b, se fig. 1. Volumet mellom de to lederne er fylt med et dielektrisk medium med konstant permittivitet ϵ. Bestem kapasitansen C til en slik kondensator.

b) Kontrollér svaret i a) ved å vise at kapasitansen blir som for en parallellplatekondensator når det dielektriske sjiktet mellom lederne blir veldig tynt, dvs. $b - a \ll a$. (Denne antagelsen skal kun brukes i denne deloppgaven.)

c) Anta at kondensatoren har null netto ladning. Dersom spenningen over kondensatoren er V, finn det elektriske feltet overalt, uttrykt ved C.



Figur 1: Tverrsnittet til en kulekondensator.

d) Skriv opp uttrykket for lagret energi per volumenhet i et elektrisk felt, og vis ut fra dette uttrykket at den totale energien til kulekondensatoren kan skrives $W_e = \frac{1}{2}CV^2$, der V er spenningen over de to lederne.

e) Finn kapasitansen dersom permittiviteten mellom lederne ikke lenger er konstant, men gitt av funksjonen $\epsilon = K/r^3$. Her er K en konstant.

f) Anta nå at mediet i området $a < r < b$ har konstant, positiv konduktivitet σ i tillegg til permittiviteten ϵ fra forrige punkt (dvs. σ er uavhengig av r mens $\epsilon = K/r^3$). Hva blir resistansen målt mellom de to lederne?

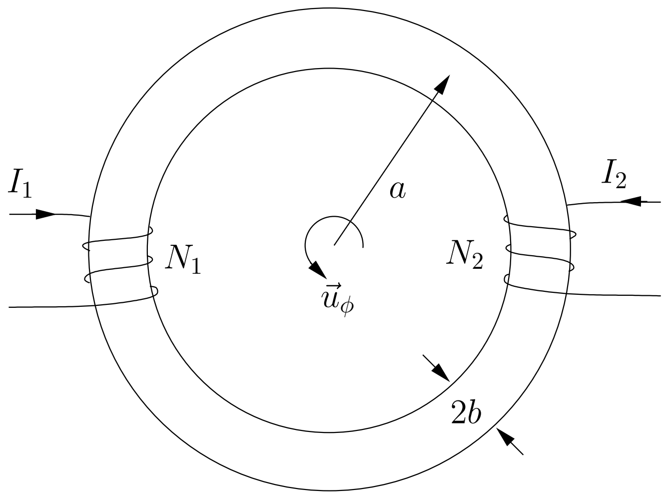
Oppgave 2

a) Gitt en toroideformet (smultringformet) kjerne av et materiale med permeabilitet $\mu = \mu_r\mu_0$, der $\mu_r \gg 1$. Radius i toroiden er a, og tverrsnittsradien b til toroiden er mye mindre enn a, se fig. 2. Rundt kjernen vikles to spoler 1 og 2, med henholdsvis N_1 og N_2 viklinger. Det går en strøm I_1 i spole 1, mens strømmen i spole 2 er I_2.

Finn den magnetiske flukstettheten $\vec{B}$ og det magnetiske feltet $\vec{H}$ i toroidekjernen.

b) Finn selvinduktansen L_{11}. Finn også den gjensidige induktansen L_{12} mellom de to spolene.

c) Sett opp uttrykket for energitetthet i et magnetisk felt. Bruk dette uttrykket til å finne energien i toroiden. Kontroller svaret ved å sammenlikne med uttrykket for energien i et system av to spoler.



Figur 2: Magnetisk krets.

NB! I resten av oppgaven uttrykker du svarene ved induktansene, der det er naturlig. (Det er ikke nødvendig å sette inn uttrykkene fra b)).

Vi er kun interessert i den tidsvarierende delen av størrelsene det spørres etter.

d) Det påtrykkes en spenning i spole 1 slik at strømmen blir $I_1 = I_0 \cos(\omega t)$. Spole 2 er åpen, så det ikke går strøm i den. Finn den induserte elektromotoriske spenningen (emf) i spole 2.

e) Spole 1 har null resistans. Den påtrykkes nå en spenning $V_1 = V_0 \cos(\omega t)$. Spole 2 er åpen, så det ikke går strøm i den. Finn strømmen I_1 i spole 1.

f) Spole 1 har nå resistansen R. Spenningen over spole 1 er som i forrige punkt. Spole 2 kortsluttes, så den utgjør en lukket krets hvor det kan flyte strøm. Denne spolen har null resistans. Finn strømmene I_1 og I_2 i de to spolene.

Oppgave 3

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

a) Hva er Faradays lov?

i) $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$,

ii) $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D}/\partial t$,

iii) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$,

iv) Ingen av alternativene ovenfor.

b) Potensialet i rommet er gitt av uttrykket

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{for } r \leq a, \\ V_0 \frac{a}{r} & \text{for } r > a, \end{cases} \tag{1}$$

i et sfærisk koordinatsystem. Her er V_0 og a vilkårlige konstanter (men $a > 0$). Anta elektrostatikk og at permittiviteten er ϵ_0 overalt. Hva er romladningstettheten ρ for $r < a$ og $r > a$, samt flateladningstettheten σ for $r = a$?

i) $\rho = 0$ for $r \neq a$ og $\sigma = \epsilon_0 V_0/a$ for $r = a$,

ii) $\rho = 0$ for $r < a$, $\rho = -\epsilon_0 V_0 a/r^2$ for $r > a$ og $\sigma = \epsilon_0 V_0/a$ for $r = a$,

iii) $\rho = 0$ for $r < a$, $\rho = \epsilon_0 V_0 a/r^3$ for $r > a$ og $\sigma = \epsilon_0 V_0/a$ for $r = a$,

iv) $\rho = 0$ for $r < a$, $\rho = \epsilon_0 V_0 a/r^3$ for $r > a$ og $\sigma = 0$ for $r = a$.

c) En uendelig, plan flateladning med konstant flateladningstetthet σ er plassert i xy-planet. Overalt rundt planet er det vakuum. Hva er størrelsen (absoluttverdien) til det elektriske feltet for $z \neq 0$?

i) $2\sigma/\epsilon_0$,

ii) σ/ϵ_0,

iii) $\sigma/(2\epsilon_0)$,

iv) $\sigma/(2\epsilon_0 z^2)$.

d) Vi beholder flateladningen i forrige deloppgave. I tillegg settes det et uendelig, netto uladet, ledende plan parallelt med flateladningen, i $z = -d$, der avstanden $d > 0$. Hva blir nå det elektriske feltet mellom planene, dvs. for $-d < z < 0$? Du kan anta at det ledende planet har endelig tykkelse.

i) $2\sigma/\epsilon_0$,

ii) σ/ϵ_0,

iii) $\sigma/(2\epsilon_0)$,

iv) Umulig å si, man må vite mer om det ledende planet.

e) Når er loven $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D}/\partial t$ gyldig?

i) kun når det er symmetri,

ii) kun i magnetostatikken,

iii) alltid,

iv) den er kun gyldig i Sverige.

Formler i elektromagnetisme:

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r, \qquad \vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q, \qquad V_P = \int_P^R \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, \qquad \vec{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho,$$

$$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}, \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E}, \qquad \epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e),$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} Q/V, \qquad C = \epsilon S/d,$$

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}, \qquad \vec{p} = Q\vec{d},$$

$$\vec{J} = NQ\vec{v}, \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \qquad \vec{J} = \vec{E}/\rho, \qquad \sigma = 1/\rho, \qquad P_J = \int_v \vec{J}\cdot\vec{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = I_2\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{u}_r}{r^2}\right), \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{u}_r}{r^2}, \qquad \mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B},$$

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \qquad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_m), \qquad \vec{m} = I\vec{S},$$

$$\vec{M}_F = \vec{m}\times\vec{B}, \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \qquad w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\vec{F} = -(\nabla W_m)_{\Phi=\text{konst}}, \quad \vec{F} = +(\nabla W_m)_{I=\text{konst}}, \quad \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}).$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \quad \left(e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho, \qquad \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J},$$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\vec{E}_{1\text{ tang}} = \vec{E}_{2\text{ tang}}, \qquad \vec{D}_{1\text{ norm}} - \vec{D}_{2\text{ norm}} = \sigma\vec{n},$$

$$\vec{H}_{1\text{ tang}} - \vec{H}_{2\text{ tang}} = \vec{J}_s\times\vec{n}, \qquad \vec{B}_{1\text{ norm}} = \vec{B}_{2\text{ norm}}.$$

Konstanter:

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m
Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0 \cdot 10^8$ m/s
Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$
Elementærladningen: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2
Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$\vec{u}_x \cdot \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \text{ (x vilkårlig akse)}$$
$$\nabla(V+W) = \nabla V + \nabla W$$
$$\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$$
$$\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$$
$$\nabla \cdot (\vec{A}+\vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$$
$$\nabla(V\vec{A}) = V\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla V$$
$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$$
$$\nabla \times (\vec{A}+\vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B}$$
$$\nabla \times (V\vec{A}) = (\nabla V) \times \vec{A} + V\nabla \times \vec{A}$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$
$$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$$
$$\nabla \times (\nabla V) = 0$$
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Integralidentiteter:

$$\int_v \nabla V \mathrm{d}v = \oint_S V \mathrm{d}\vec{S}$$
$$\int_v \nabla \cdot \vec{A} \mathrm{d}v = \oint_S \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \quad \text{(Divergensteoremet)}$$
$$\int_v \nabla \times \vec{A} \mathrm{d}v = \oint_S \mathrm{d}\vec{S} \times \vec{A}$$
$$\int_S \nabla \times \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\nabla \times \vec{A} = \vec{u}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{u}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{u}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$
$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$
$$\nabla^2 \vec{A} = (\nabla^2 A_x)\vec{u}_x + (\nabla^2 A_y)\vec{u}_y + (\nabla^2 A_z)\vec{u}_z$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{u}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\nabla \times \vec{A} = \vec{u}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \vec{u}_\phi\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\vec{u}_z}{r}\left(\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)$$
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{u}_\phi$$
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$
$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\vec{u}_r}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) + \frac{\vec{u}_\theta}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r}\right) + \frac{\vec{u}_\phi}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)$$
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

STUDENTNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				