Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Bokmål/Nynorsk

Faglig/fagleg kontakt under eksamen:
Guro Svendsen (73592773)

Hjelpemidler:
C - Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt:
Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.
Hjelpemiddel:
C - Spesifiserte trykte og handskrevne hjelpemiddel tillate:
Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillaten.

EKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

Mandag 31. mai 2010
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur: 21. juni 2010

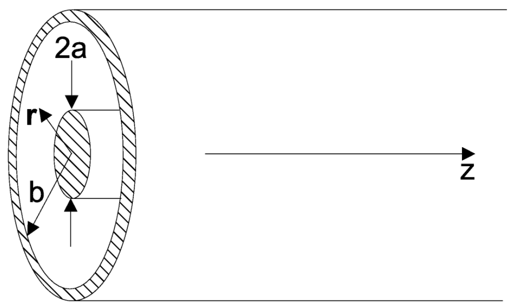
Oppgave 1

En koaksialkabel består av en innerleder med radius a og en ytterleder med indre radius b, se figur 1. Anta at lederne er ideelle og at kabelen er netto uladet. Kabelens lengde l er mye større enn b.

a) Mellom lederne befinner det seg et dielektrisk medium med permittivitet $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. Innerlederen og ytterlederen er koplet til hver sin pol av et batteri: Innerlederen har dermed det konstante potensialet V_0, mens ytterlederen har potensial 0. Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ overalt.

b) Finn potensialet overalt.

c) Finn kapasitansen per lengdeenhet.



Figur 1: Koaksialkabel.

d) Vi tar nå ut det dielektriske materialet mellom lederne, og erstatter det med vakuum. Batteriet er fortsatt tilkoplet, og geometrien til lederne er som før. Hva blir nå det elektriske feltet? Hvor mye ladning har batteriet levert til eller mottatt fra innerlederen mens vi tok ut det dielektriske mediet?

e) Hvis vi hadde koplet fra batteriet før vi tok ut det dielektriske mediet, hva ville det elektriske feltet blitt? Hva ville potensialforskjellen mellom lederne blitt?

Oppgave 2

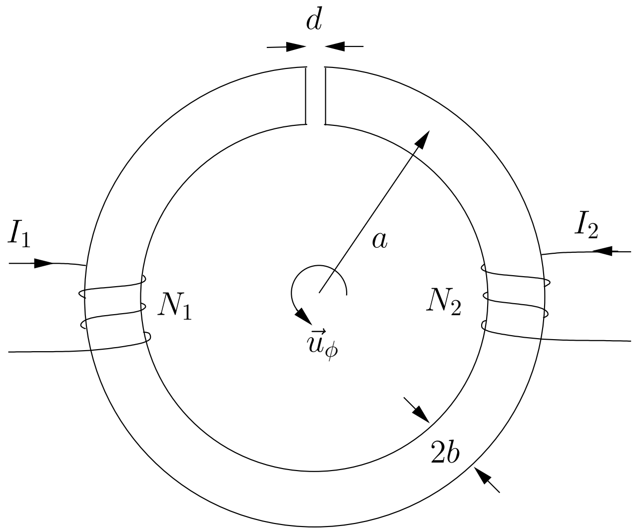
a) Definer magnetisk fluks gjennom en flate S.

b) Vis at fluksen gjennom S kan uttrykkes som et linjeintegral av vektorpotensialet $\vec{A}$, og angi hvilken kurve det skal integreres over.

Oppgave 3

a) Gitt en toroideformet (smultringformet) kjerne av et materiale med permeabilitet $\mu = \mu_r \mu_0$, der $\mu_r \gg 1$. Radius i toroiden er a, og tverrsnittsradien b til toroiden er mye mindre enn a, se figur 2. Det er et lite luftgap med tykkelse d i toroiden. Du kan anta at $d \ll b$. Rundt kjernen vikles to spoler 1 og 2, med henholdsvis N_1 og N_2 viklinger. Det går en strøm I_1 i spole 1, mens strømmen i spole 2 er I_2.

Finn den magnetiske flukstettheten $\vec{B}$ og det magnetiske feltet $\vec{H}$ i toroidekjernen. (Her og i oppgave 3d-e nedenfor trenger du ikke oppgi feltene i luftgapet, kun i selve toroidekjernen.)



Figur 2: Magnetisk krets for oppgave 2a-c.

b) Finn selvinduktansen L_{11}. Finn også den gjensidige induktansen L_{12} mellom de to spolene. (Hint: Induktansene skal ikke være avhengige av noen av strømmene.)

c) Det påtrykkes en spenning i spole 1 slik at strømmen blir $I_1 = I_0 \cos(\omega t)$. Spole 2 er åpen, så det ikke går strøm i den. Finn den induserte elektromotoriske spenningen (emf) i spole 2.

d) Kjernen og luftgapet erstattes av et magnetisk materiale med permanent magnetisering. Spolene tas bort. (Dvs. vi ser nå på en toroideformet permanentmagnet uten luftgap og uten spoler.) Magnetiseringen i toroiden er gitt ved $\vec{M} = M\vec{u}_\phi$, der M er konstant over tverrsnittet og uavhengig av ϕ. Her er $\vec{u}_\phi$ en enhetsvektor i ϕ-retning i et sylindrisk koordinatsystem, der z-aksen sammenfaller med aksen i toroiden. Finn den magnetiske flukstettheten $\vec{B}$ og det magnetiske feltet $\vec{H}$ i toroidekjernen.

e) Det skjæres nå bort en spalte av tykkelse d av toroidekjernen i forrige punkt. Her er $d \ll b$. Du kan fortsatt anta at fluksen følger rundt toroidekjernen og at flukslinjene ikke spres i luftgapet. Finn den magnetiske flukstettheten $\vec{B}$ og det magnetiske feltet $\vec{H}$ i toroidekjernen.

Oppgave 4

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen. Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

a) Når er følgende versjoner av Gauss' lov gyldig? (1) $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ og (2) $\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_{\text{total}}$. Her er ρ den frie romladningstettheten, mens ρ_{total} er all romladningstetthet (fri og bunden).

i) begge er kun gyldige når det er symmetri,

ii) begge er kun gyldige i elektroostatikken,

iii) (1) er gyldig i et vilkårlig medium, mens (2) er kun gyldig i vakuum,

iv) begge er alltid gyldige.

b) Hva er sant om uttrykket $w_m = \frac{1}{2}\mu H^2$?

i) Dette er formelen for energi per volumenhet (energitetthet) i et magnetisk felt i lineære og isotrope medier,

ii) Dette er formelen for energi per volumenhet (energitetthet) i et magnetisk felt i vilkårlige medier,

iii) Dette er formelen for total energi i et system av spoler,

iv) Alle alternativene ovenfor.

c) Det elektriske feltet overalt i rommet er gitt av uttrykket

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} C_1 r^2 \vec{u}_r, & \text{for } r < a, \\ C_2 \frac{1}{r} \vec{u}_r, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{1}$$

i et sylindrisk koordinatsystem. Her er C_1 en vilkårlig konstant, og $C_2 = C_1 a^3$. Anta at permittiviteten er ϵ_0 overalt. Hva er ladningstettheten ρ?

i) $\rho = 3\epsilon_0 C_1 r$ for $r < a$ og $\rho = 0$ ellers,

ii) $\rho = 3\epsilon_0 C_1 r^2$ for $r < a$ og $\rho = 0$ ellers,

iii) $\rho = 2\epsilon_0 C_1 r$ for $r < a$ og $\rho = -\epsilon_0 C_2 / r^2$ ellers,

iv) $\rho = 2\epsilon_0 C_1 r$ for $r < a$ og $\rho = -C_2 / r^2$ ellers.

d) Se på situasjonen i forrige deloppgave, men la både C_1 og C_2 være vilkårlige konstanter.

i) Da er det en flateladningstetthet $\sigma = \epsilon_0(C_2/a - C_1 a^2)$ på grenseflaten $r = a$,

ii) Da er det en flateladningstetthet $\sigma = -\epsilon_0(C_2/a - C_1 a^2)$ på grenseflaten $r = a$,

iii) Da får vi en ufysisk situasjon fordi grensebetingelsene ikke kan oppfylles i $r = a$.

iv) Ingen av alternativene ovenfor.

e) Et vesen fra en fremmede planet har "ører" som hører elektromagnetisk stråling. (Kanskje burde disse "ørene" heller kalles øyer...) Vesenet oppfatter ulike frekvenser i det elektromagnetiske spekteret akkurat slik vi oppfatter ulike lydfrekvenser. Vesenet er spesielt glad i musikk av slik elektromagnetisk stråling, og lager seg derfor en "gitar". Hva er sant om romvesenets elektromagnetiske "gitar"?

i) Gitaren kan bestå av to parallelle speil med luft mellom. Tonen eksiteres ved å generere en liten kortslutningsgnist mellom speilene. Den grunnharmoniske frekvensen er $f = c/(2l)$, der l er avstanden mellom speilene, og c er lyshastigheten i lufta. Tonens kvalitet (dvs. styrken til hver overharmonisk frekvens) er gitt av eksitasjonens frekvensinnhold. Dess raskere utladning, dess skarpere tone (dvs. større styrke til de høye overharmoniske frekvensene). Tonen kan stemmes ved å endre luftas temperatur og dermed relativ permittivitet.

ii) Gitaren kan bestå av to parallelle, absorberende flater med vakuum mellom. Tonen eksiteres ved å generere en liten kortslutningsgnist mellom flatene. Den grunnharmoniske frekvensen er $f = c/l$, der l er avstanden mellom flatene, og c er lyshastigheten i vakuum. Tonens kvalitet (dvs. styrken til hver overharmonisk frekvens) er gitt av eksitasjonens frekvensinnhold. Dess raskere utladning, dess skarpere tone (dvs. større styrke til de høye overharmoniske frekvensene). Tonen kan stemmes ved å endre luftas temperatur og dermed relativ permittivitet.

iii) Gitaren kan bestå av to parallelle, absorberende flater med vakuum mellom. Tonen eksiteres ved å generere en liten kortslutningsgnist mellom flatene. Den grunnharmoniske frekvensen er $f = c/l$, der l er avstanden mellom flatene, og c er lyshastigheten i vakuum. Tonens kvalitet (dvs. styrken til hver overharmonisk frekvens) er gitt av avstanden l mellom flatene. Dess mindre l, dess skarpere tone (dvs. større styrke til de høye overharmoniske frekvensene). Tonen kan stemmes ved å endre luftas temperatur og dermed relativ permittivitet.

iv) Gitaren kan lages av naturlige kvantesvingninger. Tonens kvalitet er avhengig av gitaristens energisystem. Tonen kan stemmes med auramassasje.

Formler i elektromagnetisme:

$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r, \qquad \vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q, \qquad V_P = \int_P^R \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, \qquad \vec{E} = -\nabla V,$

$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho,$

$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}, \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E}, \qquad \epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e),$

$C \stackrel{\text{def}}{=} Q/V, \qquad C = \epsilon S/d,$

$W_e = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}, \qquad \vec{p} = Q\vec{d},$

$\vec{J} = NQ\vec{v}, \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \qquad \vec{J} = \vec{E}/\rho, \qquad \sigma = 1/\rho, \qquad P_J = \int_v \vec{J}\cdot\vec{E}\mathrm{d}v,$

$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = I_2\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{u}_r}{r^2}\right), \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{u}_r}{r^2}, \qquad \mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B},$

$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \qquad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_m), \qquad \vec{m} = I\vec{S},$

$\vec{M}_F = \vec{m}\times\vec{B}, \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \qquad w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H},$

$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$

$\vec{F} = -(\nabla W_m)_{\Phi=\text{konst}}, \quad \vec{F} = +(\nabla W_m)_{I=\text{konst}}, \quad \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}).$

Maxwells likninger:

$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \quad \left(e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right),$

$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S},$

$\nabla\cdot\vec{D} = \rho, \qquad \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S},$

$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0.$

Potensialer i elektrodynamikken:

$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J},$

$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$

Grensebetingelser:

$\vec{E}_{1\text{ tang}} = \vec{E}_{2\text{ tang}}, \qquad \vec{D}_{1\text{ norm}} - \vec{D}_{2\text{ norm}} = \sigma\vec{n},$

$\vec{H}_{1\text{ tang}} - \vec{H}_{2\text{ tang}} = \vec{J}_s\times\vec{n}, \qquad \vec{B}_{1\text{ norm}} = \vec{B}_{2\text{ norm}}.$

Konstanter:

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m
Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 299792458$ m/s
$\approx 3.0 \cdot 10^8$ m/s
Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$
Elementærladningen: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2
Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$\vec{u}_x \cdot \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (x \text{ vilkårlig akse})$$
$$\nabla(V + W) = \nabla V + \nabla W$$
$$\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$$
$$\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$$
$$\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$$
$$\nabla(V\vec{A}) = V\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla V$$
$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$$
$$\nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B}$$
$$\nabla \times (V\vec{A}) = (\nabla V) \times \vec{A} + V\nabla \times \vec{A}$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$
$$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$$
$$\nabla \times (\nabla V) = 0$$
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Integralidentiteter:

$$\int_v \nabla V \mathrm{d}v = \oint_S V \mathrm{d}\vec{S}$$
$$\int_v \nabla \cdot \vec{A} \mathrm{d}v = \oint_S \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \quad \text{(Divergensteoremet)}$$
$$\int_v \nabla \times \vec{A} \mathrm{d}v = \oint_S \mathrm{d}\vec{S} \times \vec{A}$$
$$\int_S \nabla \times \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\nabla \times \vec{A} = \vec{u}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{u}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{u}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$
$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$
$$\nabla^2 \vec{A} = (\nabla^2 A_x)\vec{u}_x + (\nabla^2 A_y)\vec{u}_y + (\nabla^2 A_z)\vec{u}_z$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{u}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\nabla \times \vec{A} = \vec{u}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \vec{u}_\phi\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\vec{u}_z}{r}\left(\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)$$
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{u}_\phi$$
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$
$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\vec{u}_r}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) + \frac{\vec{u}_\theta}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r}\right) + \frac{\vec{u}_\phi}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)$$
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

KANDIDATNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				