Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Bokmål/Nynorsk

Faglig/fagleg kontakt under eksamen:
Jon Olav Grepstad (41044764)

Hjelpemidler:
C - Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt:
Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.
Hjelpemiddel:
C - Spesifiserte trykte og handskrevne hjelpemiddel tillate:
Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillaten.

KONTINUASJONSEKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

Tirsdag 10. aug. 2010
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur: 31. aug. 2010

Oppgave 1

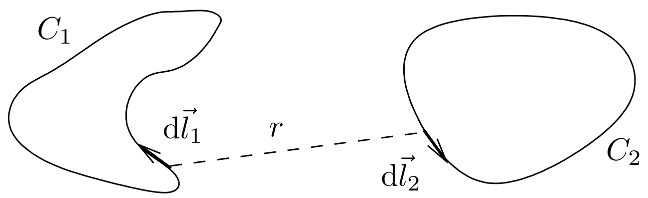
a) Definer magnetisk fluks gjennom en flate S.

b) Vis at fluksen gjennom S kan uttrykkes som et linjeintegral av vektorpotensialet $\vec{A}$, og angi hvilken kurve det skal integreres over.

c) Vektorpotensialet fra en sløyfe C_1 som fører strømmen I_1 er gitt av Biot-Savarts lov for $\vec{A}$:

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 \mathrm{d}\vec{l}_1}{r}, \tag{1}$$

der r er avstanden fra strømelementet $I_1 \mathrm{d}\vec{l}_1$ til observasjonspunktet. Vi har her antatt at det er vakuum omkring sløyfa.



Figur 1: Her vises elementene $\mathrm{d}\vec{l}_1$ og $\mathrm{d}\vec{l}_2$, samt avstanden r mellom dem.

Vis at gjensidig induktans mellom en sløyfe C_1 og en sløyfe C_2 kan skrives

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2}{r}, \tag{2}$$

der r er avstanden mellom elementene $\mathrm{d}\vec{l}_1$ og $\mathrm{d}\vec{l}_2$. Anta at det er vakuum overalt i nærheten av sløyfene.

d) Forklar med utgangspunkt i (2) hvorfor $L_{21} = L_{12}$.

e) Strømmen I_1 i sløyfe C_1 varierer med tiden t på følgende måte:

$$I_1(t) = I_0 \sin(\omega t), \tag{3}$$

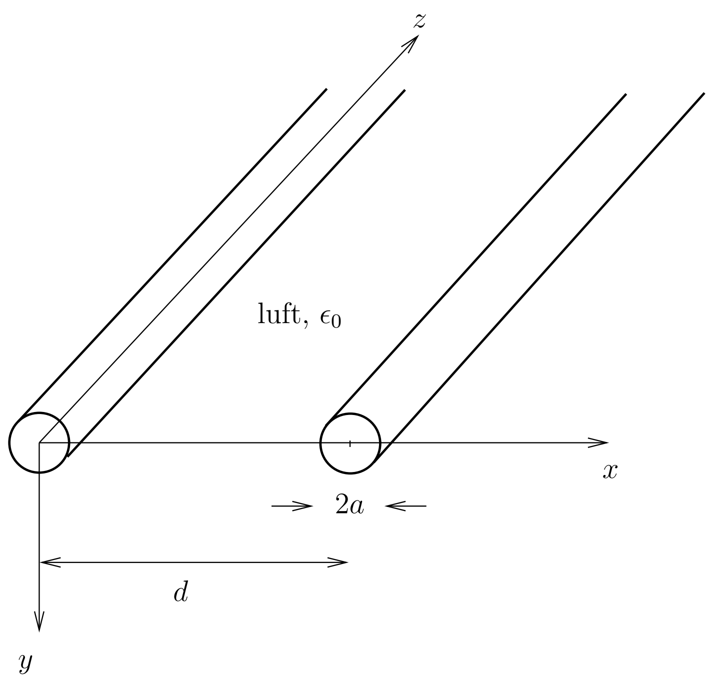
der ω og I_0 er positive konstanter. Resistansen i sløyfe C_2 er uendelig. Hva er den induserte elektromotoriske spenningen i sløyfe C_2?

Oppgave 2

I denne oppgaven ser vi på en to-trådslinje, som består av to parallelle, sylindriske ledere med avstand d mellom sentrene, se fig. 2. Begge har radius a, der $2a < d$. Lederne er så lange at man kan se bort fra effekter nær endene (de kan regnes som uendelig lange). I området omkring kablene er det luft, med permittivitet ϵ_0 og permeabilitet μ_0.

I hele oppgaven kan du anta at en eventuell ladning eller strøm er jevnt fordelt over ledernes overflate. (Denne antagelsen er ikke alltid helt rett, f.eks. vil antagelsen bety at det elektriske feltet ikke blir null i lederne, slik den skulle ha vært i elektrostatikken. Under gitte forutsetninger kan imidlertid antagelsen være en god tilnærmelse.)

a) Anta at kabelen til venstre har en ladning per lengdeenhet Q', mens kabelen til høyre har ladning per lengdeenhet $-Q'$. Anta at ladningen er jevnt fordelt over lederenes overflate. Finn det elektriske feltet for $a < x < d - a$ langs x-aksen, se fig. 2.
(Tips: Finn først feltet fra hver av lederne separat vha. Gauss' lov.)



Figur 2: To-trådslinje med parallelle, sylindriske ledere. Begge lederne har radius a.

b) Potensialforskjellen mellom lederne er V_0. Vis at det elektriske feltet for $a < x < d - a$ langs x-aksen er

$$\vec{E} = \frac{V_0}{2\ln(d/a - 1)} \frac{d}{x(d-x)} \vec{u}_x. \tag{4}$$

c) Bestem kapasitansen per lengdeenhet for to-trådslinja.

d) Luft tåler en maksimal feltstyrke på $E_t = 3 \cdot 10^6$ V/m før det blir gjennomslag. For en gitt verdi av d, finn den verdien av a som gjør at to-trådslinja tåler høyest mulig spenning V_0. (Oppgitt: Om du skulle ende opp med en likning $(1 - 2u)\ln(1/u - 1) = 1$: Denne har løsningene $u = 0.176$ og $u = 0.824$.)

e) Den venstre lederen fører nå strømmen I i positiv z-retning, mens returstrømmen $-I$ går i den andre. Anta at strømmen er jevnt fordelt over ledernes overflate. Finn den magnetiske flukstettheten $\vec{B}$ langs x-aksen for $a < x < d - a$.

f) Bestem selvinduktansen per lengdeenhet for to-trådslinja.

Oppgave 3

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen. Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

a) Hva er sant om følgende lov: $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$?

i) den kalles Amperes lov,

ii) den gjelder alltid, til og med i elektrodynamikken,

iii) den gjelder bare når det er symmetri,

iv) alle alternativene ovenfor.

b) Magne Tisme påstår at den magnetiske flukstettheten $\vec{B}$ fra en gitt, tidsuavhengig strømfordeling i vakuum er gitt av uttrykket

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\vec{u}_r, \tag{5}$$

i et sfærisk koordinatsystem. Her er $I \neq 0$ en konstant strøm. Hvordan kan du være sikker på at Magne er helt på jordet?

i) uttrykket har ikke riktig dimensjon,

ii) feltet er ikke divergensfritt i origo (dvs. feltet "biter ikke seg selv i halen"),

iii) for $r > 0$ er $\nabla \times \vec{H} = 0$; dessuten sirkulerer heller ikke $\vec{H}$ rundt origo. Altså er strømtettheten null overalt, hvilket skulle gitt $\vec{H} = 0$ og dermed $\vec{B} = 0$.

iv) alle alternativene ovenfor.

c) Det elektriske feltet overalt i rommet er gitt av uttrykket

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} C_1 r^2 \vec{u}_r, & \text{for } r < a, \\ C_2 \frac{1}{r} \vec{u}_r, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{6}$$

i et sfærisk koordinatsystem. Her er C_1 en vilkårlig konstant, og $C_2 \neq C_1 a^3$. Anta at permittiviteten er ϵ_0 overalt. Hva kan du si om ladningsfordelingen?

i) det er romladning for $r < a$, flateladning for $r = a$, men ingen romladning for $r > a$,

ii) det er romladning for $r < a$, ingen flateladning for $r = a$, og ingen romladning for $r > a$,

iii) det er romladning for $r < a$, flateladning for $r = a$, og romladning for $r > a$,

iv) det er ingen romladning for $r < a$, men det er flateladning for $r = a$ og romladning for $r > a$.

d) På et piano slår du an tonene A_4, med frekvens 440 Hz, og E_6, med frekvens $2^{19/12} \cdot 440$ Hz. En av overtonene til A_4 sammen med grunntonen E_6 vil da sveve med en svevefrekvens som er så lav at den kan oppfattes som sveving av mennesker. Hva er svevefrekvensen?

i) 1 Hz,

ii) 19 Hz,

iii) 1.49 Hz,

iv) ingen av alternativene ovenfor.

e) Når er følgende versjoner av Gauss' lov gyldig? (1) $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ og (2) $\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_{\text{total}}$. Her er ρ den frie romladningstettheten, mens ρ_{total} er all romladningstetthet (fri og bunden).

i) (1) er gyldig i et vilkårlig medium, mens (2) er kun gyldig i vakuum,

ii) begge er alltid gyldige,

iii) begge er alltid ugyldige,

iv) de er bare gyldige på sommeren.

Formler i elektromagnetisme:

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r, \qquad \vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q, \qquad V_P = \int_P^R \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, \qquad \vec{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho,$$

$$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}, \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E}, \qquad \epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e),$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} Q/V, \qquad C = \epsilon S/d,$$

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}, \qquad \vec{p} = Q\vec{d},$$

$$\vec{J} = NQ\vec{v}, \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \qquad \vec{J} = \vec{E}/\rho, \qquad \sigma = 1/\rho, \qquad P_J = \int_v \vec{J}\cdot\vec{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = I_2\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{u}_r}{r^2}\right), \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{u}_r}{r^2}, \qquad \mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B},$$

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \qquad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_m), \qquad \vec{m} = I\vec{S},$$

$$\vec{M}_F = \vec{m}\times\vec{B}, \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \qquad w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\vec{F} = -(\nabla W_m)_{\Phi=\text{konst}}, \quad \vec{F} = +(\nabla W_m)_{I=\text{konst}}, \quad \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}).$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \quad \left(e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho, \qquad \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J},$$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\vec{E}_{1\text{ tang}} = \vec{E}_{2\text{ tang}}, \qquad \vec{D}_{1\text{ norm}} - \vec{D}_{2\text{ norm}} = \sigma\vec{n},$$

$$\vec{H}_{1\text{ tang}} - \vec{H}_{2\text{ tang}} = \vec{J}_s\times\vec{n}, \qquad \vec{B}_{1\text{ norm}} = \vec{B}_{2\text{ norm}}.$$

Konstanter:

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m
Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s
$\approx 3.0 \cdot 10^8$ m/s
Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$
Elementærladningen: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2
Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$\vec{u}_x \cdot \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \text{ (x vilkårlig akse)}$$
$$\nabla(V + W) = \nabla V + \nabla W$$
$$\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$$
$$\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$$
$$\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$$
$$\nabla(V\vec{A}) = V\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla V$$
$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$$
$$\nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B}$$
$$\nabla \times (V\vec{A}) = (\nabla V) \times \vec{A} + V\nabla \times \vec{A}$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$
$$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$$
$$\nabla \times (\nabla V) = 0$$
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Integralidentiteter:

$$\int_v \nabla V \mathrm{d}v = \oint_S V \mathrm{d}\vec{S}$$
$$\int_v \nabla \cdot \vec{A} \mathrm{d}v = \oint_S \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \quad \text{(Divergensteoremet)}$$
$$\int_v \nabla \times \vec{A} \mathrm{d}v = \oint_S \mathrm{d}\vec{S} \times \vec{A}$$
$$\int_S \nabla \times \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\nabla \times \vec{A} = \vec{u}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{u}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{u}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$
$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$
$$\nabla^2 \vec{A} = (\nabla^2 A_x)\vec{u}_x + (\nabla^2 A_y)\vec{u}_y + (\nabla^2 A_z)\vec{u}_z$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{u}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\nabla \times \vec{A} = \vec{u}_r \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \vec{u}_\phi \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\vec{u}_z}{r} \left(\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)$$
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{u}_\phi$$
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$
$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\vec{u}_r}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) + \frac{\vec{u}_\theta}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r}\right) + \frac{\vec{u}_\phi}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)$$
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

KANDIDATNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				