Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Bokmål/Nynorsk

Faglig/fagleg kontakt under eksamen:
Guro Svendsen (73592773)

Hjelpemidler:
C - Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt:
Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.
Hjelpemiddel:
C - Spesifiserte trykte og handskrevne hjelpemiddel tillate:
Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillaten.

EKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

Onsdag 3. juni 2009
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur: 24. juni 2009

Oppgave 1

Gitt et lineært medium med frekvensuavhengig konduktivitet σ og frekvensuavhengig permittivitet ϵ.

a) Anta at det elektriske feltet $\vec{E}$ varierer harmonisk med frekvens ω, dvs. feltet er på formen

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t), \tag{1}$$

der $\vec{E}_0$ er en konstant amplitude, og t er tiden. Forklar hvorfor mediet kan sees på som en leder ved lave frekvenser og som en isolator ved høye frekvenser.

Tips: Se på kildene til magnetfeltet, ifølge den generaliserte Ampères lov $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

b) Ved hvilken frekvens kan vi grovt sett si denne overgangen skjer?

c) Feltet er nå ikke lenger harmonisk. Se på et område av rommet hvor mediet er uniformt, dvs. σ og ϵ er uavhengig av posisjon. Ved hjelp av betingelsen om ladningsbevarelse samt Gauss' lov, vis at

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon}\rho. \tag{2}$$

d) Anta at ladningsfordelingen ved $t = 0$ er $\rho(0)$. Vis at

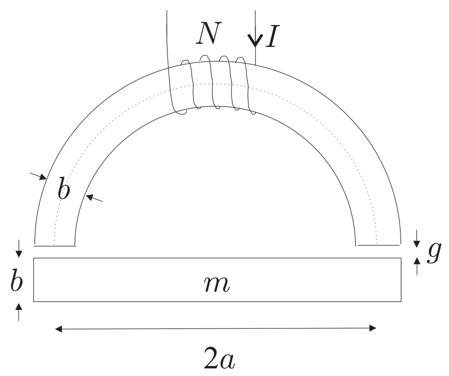
$$\rho(t) = \rho(0)\exp[-(\sigma/\epsilon)t]. \tag{3}$$

Tolk uttrykket. Hvor blir det av ladningen som er beskrevet av $\rho(0)$?

e) Gitt en ledertråd med tverrsnittsareal 0.5 mm^2. Lederen fører strømmen $I = 5$ A, som er jevnt fordelt over tverrsnittet. Hva er de frie elektronenes midlere driftshastighet hvis lederen er kopper med fri elektrontetthet $N = 8.5 \cdot 10^{28}$ m^{-3}? Sammenlikn med termisk hastighet for et elektron ved romtemperatur (størrelsesorden 10^5 m/s).

Oppgave 2

Figuren nedenfor viser en hesteskoformet elektromagnet med en bjelke like under. Tverrsnittet til både elektromagneten og bjelken er kvadratisk med sidekant b. Dimensjonene på kjernen og luftgapet er ellers som vist i figuren. Anta at $a \gg b$. Den relative permeabiliteten til elektromagneten og bjelken er så stor at den kan regnes som uendelig. Rundt den hesteskoformede kjernen er det viklet en spole med N viklinger. Anta at luftgapet g er så lite at vi kan se bort fra spredning av flukslinjer.



a) Finn selvinduktansen L til spolen.

b) Finn den magnetiske energien som er lagret i systemet.

c) Dersom massen til jernbjelken er m, hva må strømmen I være for at tyngekraften akkurat skal balansere den magnetiske kraften?

Oppgave 3

a) To spoler har henholdsvis selvinduktanser L_{11} og L_{22}. Den gjensidige induktansen mellom spolene er $L_{12} = L_{21}$. Finn den totale selvinduktansen for en seriekopling av spolene.

b) Spole 1 koples nå i stedet til en ideell spenningskilde $V(t)$, der

$$V(t) = V_0 \sin(\omega t). \tag{4}$$

Spole 2 koples til et oscilloskop med uendelig inngangsimpedans. Hva blir spenningsforløpet som vises på oscilloskopet?

Oppgave 4

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

a) Når er Amperes' lov $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ gyldig?

i) kun når det er symmetri,

ii) kun i magnetostatikken når $\partial \vec{D}/\partial t = 0$,

iii) kun i magnetostatikken når $\partial \vec{D}/\partial t = 0$, og når det er symmetri,

iv) alltid.

b) Likningen $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$ impliserer alene at

i) en lang, rett leder som fører en strøm gir opphav til et sirkulerende magnetfelt,

ii) ladningsbevarelse,

iii) Gauss' lov er tilfredsstilt,

iv) en varierende fluks induserer en emf.

c) Fire like ladninger Q er plassert på hjørnene til et kvadrat med sidekant a. Overalt rundt ladningene er det vakuum. Hva er absoluttverdien til totalkraften som virker på en av dem?

i) $\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}(\sqrt{2})$,

ii) $\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}(\sqrt{2}+1/2)$,

iii) $\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}(\sqrt{2}+1)$,

iv) $\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}(\sqrt{2}+2)$.

d) I forrige oppgave tar vi bort ladningen på det ene hjørnet. Hva blir potensialet i dette punktet dersom referansen settes i uendeligheten?

i) $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}(\sqrt{2}+1)$,

ii) $\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}(\sqrt{2}+1)$,

iii) $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}(\frac{1}{\sqrt{2}}+2)$,

iv) $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}(\sqrt{2}+2)$.

e) Bestem dimensjonen til konstanten k slik at likningen $\vec{H} = kE\vec{u}_x$ blir dimensjonsmessig korrekt. (Her er $\vec{H}$ et magnetisk felt, E en elektrisk feltstyrke og $\vec{u}_x$ en enhetsvektor.) Svar:

i) $\mathrm{m}^{-1}\mathrm{s}$,

ii) $\mathrm{A}^2\mathrm{s}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{m}^{-2}$,

iii) $\mathrm{A}^{1000}\mathrm{kg}^{-12345}\mathrm{s}^{\pi}$.

iv) ingen av alternativene ovenfor.

Oppgitte konstanter og formler

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m
Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0 \cdot 10^8$ m/s
Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$
Elementærladningen: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2
Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

DIFFERENTIAL IDENTITIES

15. $\mathbf{u}_x \cdot \nabla V = \partial V/\partial x$ (x: arbitrary axis)
16. $\nabla(V+W) = \nabla V + \nabla W$
17. $\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$
18. $\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$
19. $\nabla \cdot (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
20. $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$
21. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$
22. $\nabla \times (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
23. $\nabla \times (V\mathbf{A}) = (\nabla V) \times \mathbf{A} + V\nabla \times \mathbf{A}$
24. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
25. $\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V = \Delta V =$ Laplacian of V
26. $\nabla \cdot [\nabla(VW)] = V\nabla \cdot (\nabla W) + 2\nabla V \cdot \nabla W + W\nabla \cdot (\nabla V)$
27. $\nabla \times (\nabla V) = 0$
28. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

INTEGRAL IDENTITIES

Basic integral identities

29. $\int_v \nabla f \, dv = \oint_S f \, d\mathbf{S}$

30. $\int_v \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ (the divergence theorem)

31. $\int_v \nabla \times \mathbf{F} \, dv = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}$

32. $\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ (Stokes's theorem)

GRADIENT, DIVERGENCE, CURL, AND LAPLACIAN IN ORTHOGONAL COORDINATE SYSTEMS

Rectangular coordinate system

Notation: $f = f(x,y,z)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x,y,z)$, $F_x = F_x(x,y,z)$, $F_y = F_y(x,y,z)$, $F_z = F_z(x,y,z)$

40. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$

41. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

42. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{u}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$

43. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

44. $\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 F_x)\mathbf{u}_x + (\nabla^2 F_y)\mathbf{u}_y + (\nabla^2 F_z)\mathbf{u}_z$

Cylindrical coordinate system

Notation: $f = f(r,\phi,z)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r,\phi,z)$, $F_r = F_r(r,\phi,z)$, $F_\phi = F_\phi(r,\phi,z)$, $F_z = F_z(r,\phi,z)$

45. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$

46. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

47. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_\phi\left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \mathbf{u}_z\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi}\right]$

48. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

49. $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

Spherical coordinate system

Notation: $f = f(r,\theta,\phi)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r,\theta,\phi)$, $F_r = F_r(r,\theta,\phi)$, $F_\theta = F_\theta(r,\theta,\phi)$, $F_\phi = F_\phi(r,\theta,\phi)$

50. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi$

51. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$

52. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta\, F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right] + \mathbf{u}_\theta\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}\right]$
$+ \mathbf{u}_\phi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]$

53. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$

54. $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r, \qquad \vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q, \qquad V_P = \int_P^R \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, \qquad \vec{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho,$$

$$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}, \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E}, \qquad \epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e),$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} Q/V, \qquad C = \epsilon S/d,$$

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}, \qquad \vec{p} = Q\vec{d},$$

$$\vec{J} = NQ\vec{v}, \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \qquad \vec{J} = \vec{E}/\rho, \qquad \sigma = 1/\rho, \qquad P_J = \int_v \vec{J}\cdot\vec{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = I_2\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{u}_r}{r^2}\right), \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{u}_r}{r^2}, \qquad \mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B},$$

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \qquad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_m), \qquad \vec{m} = I\vec{S},$$

$$\vec{M}_F = \vec{m}\times\vec{B}, \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \qquad w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\vec{F} = -(\nabla W_m)_{\Phi=\text{konst}}, \quad \vec{F} = +(\nabla W_m)_{I=\text{konst}}, \quad \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}).$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \quad \left(e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S\left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho, \qquad \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J},$$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\vec{r}', t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}', t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\vec{E}_{1\ \text{tang}} = \vec{E}_{2\ \text{tang}}, \qquad \vec{D}_{1\ \text{norm}} - \vec{D}_{2\ \text{norm}} = \sigma\vec{n},$$

$$\vec{H}_{1\ \text{tang}} - \vec{H}_{2\ \text{tang}} = \vec{J}_s\times\vec{n}, \qquad \vec{B}_{1\ \text{norm}} = \vec{B}_{2\ \text{norm}}.$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

STUDENTNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				